

مجموعه کتاب‌های امتحانی

فینال

امتحان نهایی



پایه

نظام جدید

final

ریاضی و آمار علوم انسانی

مصطفی علیزاده نائینی
اردشیر کریمیان



انتشارات مشاوران آموزش

ناشر تخصصی عمومی و علوم انسانی

درس ۳: تابع نمایی

تعریف تابع نمایی

- در حالت کلی هر تابع به شکل $f(x) = ka^x$ با دو شرط زیر رفتار نمایی دارد و یک تابع نمایی است:
- شرط اول: a مثبت باشد؛ یعنی $a > 0$
- شرط دوم: a مخالف یک باشد؛ یعنی $a \neq 1$
- ضریب k عددی از مجموعه اعداد حقیقی است که مخالف صفر است.
- در این تعریف a را «پایه» و x را با عنوان «نما» یا «توان» معرفی می‌کنند.
- هم‌چنین توابعی مانند $f(x) = (-\sqrt{a})^x$ و $g(x) = (1)^{2x}$ و $h(x) = (\Delta x - 2)^x$ نمایی نمی‌باشند.

دامنه و برد تابع نمایی

تابع $f(x) = a^x$ با شرایطی که تعریف کردیم همواره مثبت است و نمودار آن همواره بالای محور x ها قرار می‌گیرد. پس دامنه توابع نمایی (x ها یا نماها) مجموعه اعداد حقیقی است و برد آن مجموعه اعداد مثبت $(0, +\infty)$ می‌باشد. متغیر در توابع نمایی، توان این تابع x است و بدون محدودیت هر مقداری از اعداد حقیقی می‌تواند باشد.

نکته

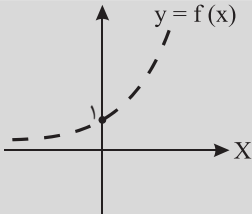
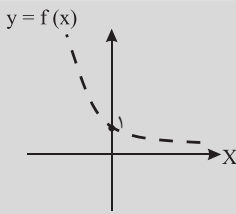
تابع $y = a^x$ هیچ‌گاه محور x ها را قطع نمی‌کند بنابراین $f(x) = 0$ نداریم ($f(x) \neq 0$)

نکته

در تابع $y = a^x$ هر خط موازی محور x ها، تنها در یک نقطه نمودار تابع را قطع می‌کند. یعنی به ازای هر x مشخص تنها یک y داریم و بالعکس.

رسم تابع نمایی و بررسی رفتار آن

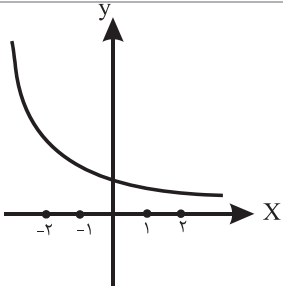
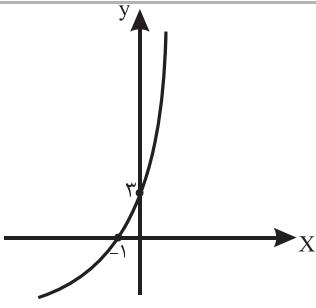
در جدول زیر به‌طور مختصر رفتار تابع $f(x) = y = a^x$ را در دو بازه مختلف برای a بررسی می‌کنیم.

	$a > 1$	$0 < a < 1$
مثال	$f(x) = 2^x$ یا 3^x یا $4^x, \dots$	$f(x) = (\frac{1}{2})^x$ یا $(\frac{1}{3})^x$
دامنه تابع	تمام اعداد حقیقی \mathbb{R}	تمام اعداد حقیقی \mathbb{R}
برد تابع	اعداد حقیقی بزرگ‌تر از صفر $(0, +\infty)$	اعداد حقیقی بزرگ‌تر از صفر $(0, +\infty)$
نقطه تلاقی با محور عرض‌ها	$(0, 1)$	$(0, 1)$
نمودار تابع		
رفتار تابع	با افزایش مقدار x تابع به بی‌نهایت میل می‌کند.	با افزایش مقدار x تابع به صفر میل می‌کند.
رفتار تابع	با کاهش x مقدار y کاهش می‌یابد و با افزایش x مقدار y به سرعت افزایش می‌یابد. (در اصطلاح می‌گوییم تابع صعودی است.)	با افزایش x مقدار y کاهش می‌یابد و با کاهش x مقدار y به سرعت افزایش می‌یابد. (در اصطلاح می‌گوییم تابع نزولی است.)

آزمون ادريس سوم: تابع نمايي

ردیف	بارم																						
۱	نقاط برخورد توابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = \frac{1}{3^x}$ را در صورت وجود بیابید.																						
۲	با استفاده از نمودار تابع $y = 2^x$ مقدار تقریبی $2^{\frac{5}{2}}$ را به دست آورید. آیا مقداری برای x یافت می‌شود که به ازای آن مقدار تابع برابر ۶ شود؟																						
۳	نمودار تابع $y = (\frac{1}{3})^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و سپس آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.																						
۴	مشخص کنید کدام یک از جدول‌های زیر بیانگر تابع نمایی است؟ چرا؟ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;"> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>y</td><td>1</td><td>6</td><td>36</td><td>216</td></tr> </table> </td> <td style="width: 50%; text-align: center;"> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-2</td></tr> <tr><td>y</td><td>4</td><td>1</td><td>$-\frac{1}{4}$</td><td>$-\frac{1}{16}$</td></tr> </table> </td> </tr> </table>	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>y</td><td>1</td><td>6</td><td>36</td><td>216</td></tr> </table>	x	0	1	2	3	y	1	6	36	216	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-2</td></tr> <tr><td>y</td><td>4</td><td>1</td><td>$-\frac{1}{4}$</td><td>$-\frac{1}{16}$</td></tr> </table>	x	1	0	-1	-2	y	4	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$
<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>y</td><td>1</td><td>6</td><td>36</td><td>216</td></tr> </table>	x	0	1	2	3	y	1	6	36	216	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-2</td></tr> <tr><td>y</td><td>4</td><td>1</td><td>$-\frac{1}{4}$</td><td>$-\frac{1}{16}$</td></tr> </table>	x	1	0	-1	-2	y	4	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$		
x	0	1	2	3																			
y	1	6	36	216																			
x	1	0	-1	-2																			
y	4	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$																			
۵	اگر $f(x) = 2^x$ باشد مقادیر $f(x+2) - 3f(x+1)$ را محاسبه کنید.																						
۶	نمودار تابع $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+1}$ محور yها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ آن را رسم کنید.																						
۷	اگر در تابع نمایی $f(x) = ka^x$ ، $f(0) = 7$ و $f(3) = 189$ باشد، $f(x)$ را به دست آورید.																						
۸	ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) اگر $2^x > 3^x > 4^x$ آنگاه: $x > 0$ ب) اگر $2^x < 3^x < 4^x$ آنگاه: $x < 0$ ج) اگر $2^x > 3^x > 4^x$ آنگاه: $x < 0$ د) اگر $2^x < 3^x < 4^x$ آنگاه: $x > 0$																						
۹	ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ باشد، با افزایش مقدار x ، مقدار y کم می‌شود. ب) در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ باشد، با کاهش مقدار x ، مقدار y زیاد می‌شود. ج) در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ باشد، با افزایش مقدار x مقدار y ، زیاد می‌شود. د) اگر $a > 1$ و $a > b$ باشد، آنگاه: $a^a > a^b$																						
۱۰	به ازای چه مقداری از a ، تابع $y = (1 - \frac{a}{3})^x$ نمایی است؟																						
۱۱	به ازای چه مقداری از a در تابع نمایی $y = (1 - \frac{a}{3})^x$ ، با کاهش مقدار x ، مقدار y افزایش می‌یابد؟																						
۱۲	شخصی در بیستمین سالگرد تولد همسرش وارث بیست میلیون تومان پول می‌شود، اگر این شخص این مبلغ را با نرخ سود سالانه ۲۰ درصد سرمایه‌گذاری کند بعد از ۵ سال چه مبلغی به آن اضافه خواهد شد؟																						
۱۳	اگر رشد سالانه جمعیت در یک کشور ۱۰ درصد باشد پس از چند سال جمعیت این کشور ۲ برابر می‌شود. (رابطه مورد نظر را بنویسید.)																						

آزمون ۲ درس سوم: تابع نمایی

ردیف	بارم	سوال
۱	۱	اگر a عددی حقیقی و دلخواه باشد آیا می توان دامنه تابع $y = a^x$ را تعیین کرد؟
۲	۱/۵	اگر $a^x > b^x$ باشد، در مورد ارتباط بین a و b چه می توان گفت؟
۳	۲	الف) نمودار توابع $y_1 = 2^x$ ، $y_2 = 3^x$ و $y_3 = 4^x$ را رسم کنید و ضابطه هر یک را بنویسید. ب) ارتباط مقادیر توابع فوق را در حالتی که مقادیر x منفی است بیابید.
۴	۲	تابع $y = (m^2 - 3)^x$ به ازای در چه مقادیری از m ، نمایی و دارای این شرط است که با افزایش x مقدار تابع افزایش می یابد؟
۵	۱/۵	نمودار تابع $f(x) = 2^x$ و خط $y = x + 1$ را رسم کنید و نقاط تلاقی این دو را تعیین کنید.
۶	۲	نمودار تابع نمایی $f(x) = (3k - 1)^x$ به صورت زیر است. حدود k را مشخص کنید. 
۷	۱/۵	نمودار زیر دارای ضابطه $f(x) = a \times 2^{x+3} + b$ است. $a+b$ را محاسبه کنید. 
۸	۲	اگر فرض کنیم $2^x = 5$ باشد حاصل عبارات زیر را به دست آورید: الف) 8^{x-3} ب) $(7 - 2^x)^x + 2^{3x}$
۹	۲	نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $f(x) = 2^x$ ، $g(x) = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ را به دست آورید؟
۱۰	۱/۵	نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $y = 3^x$ رسم کنید. الف) $f(x) = 3^{ x }$ ب) $g(x) = 3^x $
۱۱	۱/۵	فرض کنید ۴۰۰۰۰۰ تومان در حساب پس اندازی با سود ۱۲ درصد در سال ذخیره شده باشد، مبلغ پس انداز در پایان سال سوم را حساب کنید.
۱۲	۱/۵	جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهار میلیون نفر بود. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۹ میلادی چند نفر خواهد شد؟ (رابطه مورد نظر را بنویسید).

۱۲. با توجه به رابطه رشد نمایی که به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است، مبلغ پس‌انداز در پایان سال پنجم به صورت زیر است:

$$f(5) = 20 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right)^5 = \frac{2 \times 10 \cdot (120)^5}{10^5}$$

$$= \frac{2 \times 12^5 \times 10^6}{10^5}$$

$$f(5) = \frac{2 \times 12^5}{10^4} = \frac{497664}{10000} = 49/7664$$

پس به میزان $49/7664 - 20 = 29/7664$ میلیون تومان یعنی $29,766,400$ تومان به مبلغ اولیه اضافه خواهد شد.

۱۳. با توجه به معادله کلی رشد نمایی یعنی $f(t) = c(1+r)^t$ برای اینکه جمعیت یک کشور ۲ برابر شود باید مقدار $f(t)$ برابر با ۲C شود، پس:

$$2C = c(1+r)^t \Rightarrow 2 = \left(1 + \frac{10}{100}\right)^t$$

$$\Rightarrow 2 = (1/1)^t$$

مقدار t که در رابطه فوق صدق کند جواب مورد نظر است.

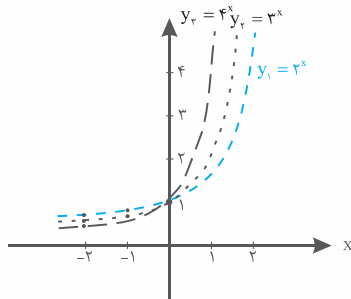
$$(1/94 \approx (1/1)^t)$$

پاسخ تابع نمایی ۲

۱. اگر a عددی حقیقی و مثبت باشد در این صورت دامنه تابع $y = a^x$ برابر مجموعه اعداد حقیقی است. اما اگر a عددی حقیقی و منفی باشد در این صورت دامنه تابع $y = a^x$ را نمی‌توان تعیین کرد، مثلاً اگر $a = -2$ باشد، تابع $y = a^x$ برای $x = \frac{1}{2}$ تعریف نشده است. $(-2)^{\frac{1}{2}}$ تعریف نشده است.

۲. اگر نامساوی $a^x > b^x$ برقرار باشد می‌دانیم a و b اعداد نامنفی هستند حال دو حالت زیر را داریم:
(۱) اگر $x > 0$ باشد در این صورت $a > b$.
(۲) اگر $x < 0$ باشد در این صورت $a < b$.

۳. الف



(ب) وقتی x منفی باشد داریم: $4^x < 3^x < 2^x$

وقتی x مثبت باشد داریم: $4^x > 3^x > 2^x$

۴. مقادیر تابع نمایی $f(x) = a^x$ زمانی با افزایش x افزایش می‌یابد که $a > 1$ باشد. پس خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= ka^3 \\ f(3) &= 189 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k \times a^3 = 7 \times a^3 = 189$$

$$\Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = 7 \times 3^x$$

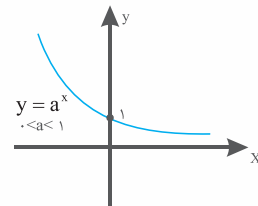
۸. الف) با توجه به مطالب صفحه ۹۹ کتاب درسی و نمودارهای رسم شده برای توابع $y_1 = 2^x$ و $y_2 = 3^x$ و $y_3 = 4^x$ چون فقط در ناحیه اول به ازای هر x نامساوی $4^x > 3^x > 2^x$ برقرار است و در ناحیه اول $x > 0$ می‌باشد، لذا گزاره «الف» درست است.

(ب) مشابه قسمت «الف» و با توجه به نمودارهای رسم شده می‌توان نتیجه گرفت این گزاره نیز صحیح است.

(ج) این گزاره نادرست است زیرا نامساوی $4^x > 3^x > 2^x$ به ازای $x = 1$ برقرار است و واضح است که $1 \not\leq 0$.

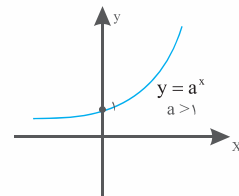
(د) این گزاره نادرست است زیرا نامساوی $4^x < 3^x < 2^x$ به ازای $x = -1$ برقرار است و واضح است که $-1 \not\geq 0$.

۹. الف) با توجه به مطالب صفحه ۱۰۱ کتاب درسی و نمودار زیر این گزاره درست است.



(ب) این گزاره در واقع بیان دیگری از گزاره «الف» است، لذا ارزش آن درست است.

(ج) با توجه به مطالب صفحه ۹۹ کتاب درسی و نمودار زیر، با افزایش مقدار x مقدار y زیاد می‌شود، پس این گزاره درست است.



(د) با توجه به قسمت «ج» و نمودار آن، با افزایش مقدار x در توان، مقدار تابع زیاد می‌شود، پس این گزاره درست است.

۱۰. مطابق تعریف کتاب درسی برای تابع نمایی بودن، باید «پایه عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ باشد»، لذا:

$$1 - \frac{a}{2} > 0 \Rightarrow 1 > \frac{a}{2} \Rightarrow 2 > a \quad \text{و} \quad 1 - \frac{a}{2} \neq 1 \Rightarrow \frac{a}{2} \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

پس a باید کوچک‌تر از ۲ و مخالف صفر باشد.

۱۱. مطابق تعریف کتاب درسی برای آنکه مقدار تابع نمایی a^x با کاهش مقدار x افزایش یابد، باید «پایه عدد حقیقی مثبت و بین صفر و ۱ باشد»، لذا:

$$0 < 1 - \frac{a}{2} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{a}{2} < 0 \Rightarrow 1 > \frac{a}{2} > 0 \Rightarrow 2 > a > 0$$

پس a باید کوچک‌تر از ۲ و بزرگ‌تر صفر باشد.

