انتشارات مشاوران آموزش

مجموعه کتاب‌های هدف‌دار

جامع کنکور

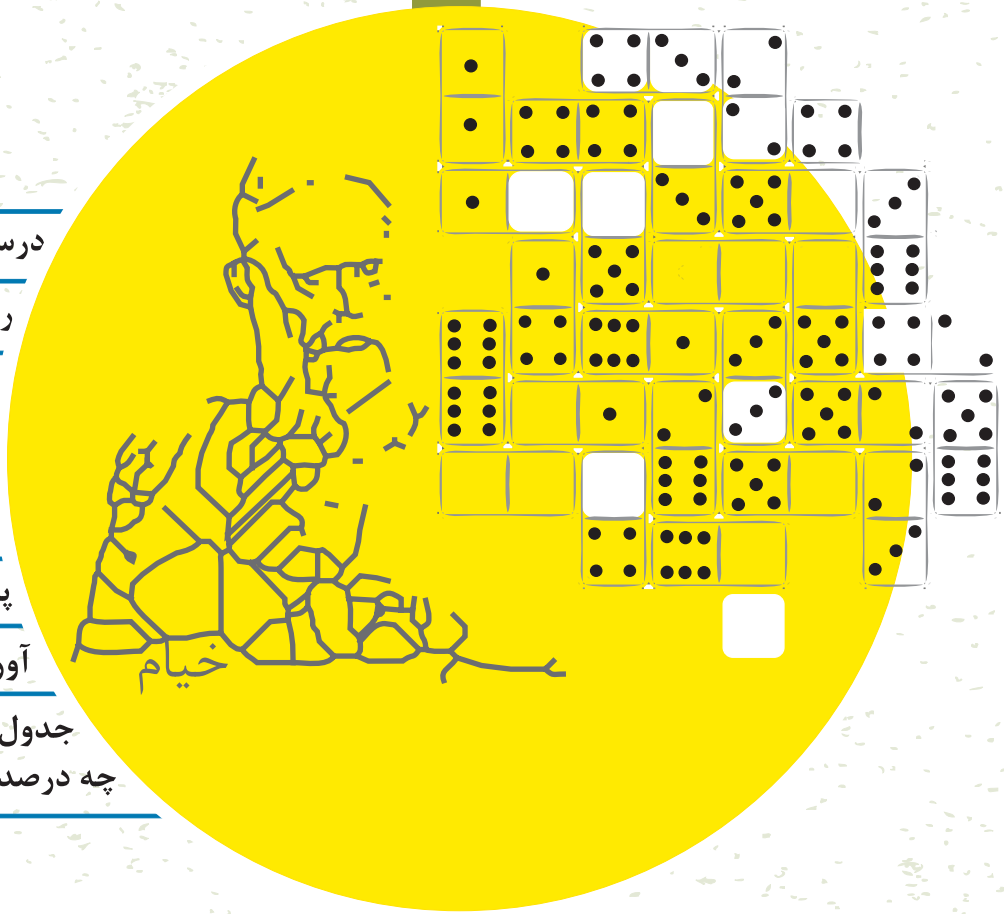
ریاضی و آمار

نظام جدید

پایه (۱۰ و ۱۱)

مصطفی علیزاده نائینی- محمد عسگری

شما منطق را می‌شناسید.
ذهن منطقی، ریاضیات را خوب می‌فهمد.
با شجاعت، ریاضی مشاوران را بخوانید!
هیچ درسی دشوار نیست.



- درسنامه جامع و کامل
- ریاضی به زبان انسانی‌ها
- ۱۰۰۰ پرسش چهارگزینه‌ای
- چینش هدف‌دار تست‌ها
- تست‌های پوششی در هر ریز مبحث
- پاسخ‌های تشریحی
- آوردن تمام مراحل حل در پاسخ‌ها
- جدول اعداد انسانی:
  چه درصدی بزنم؟ چه رتبه‌ای می‌آورم؟

ناشر تخصصی دروس عمومی و علوم انسانی

انسانی‌ها! تا آخر همراه شما هستیم

حتما ورق بزنید و پشت همین صفحه را بخوانید.

ریاضی و آمار (۱) و (۲)

فصل سوم تابع

درس ۱: مفهوم تابع

درس ۲: ضابطهٔ جبری تابع

درس ۳: نمودار تابع خطی

درس ۴: نمودار تابع درجهٔ ۲

درس ۵: توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

درس ۶: توابع پلکانی و قدر مطلقی

درس ۷: اعمال بر روی توابع

درس ۱

مفهوم تابع

رابطهٔ بین دو چیز

فرض کنید اتومبیلی با سرعت ثابت ۱۵ متر بر ثانیه در مسیری درحال حرکت است، یعنی در هر ثانیه ۱۵ متر جابه‌جا می‌شود. اگر بخواهیم رابطهٔ بین «زمان» و «جابه‌جایی» را پیدا کنیم، یعنی بفهمیم مثلاً در ۱۰ ثانیه چقدر جابه‌جا شده است، چه‌کار باید بکنیم؟

چون در هر ثانیه اتومبیل ۱۵ متر جابه‌جا می‌شود پس مسافت طی شده در هر ثانیه، نسبت به مسافت طی شده در ثانیهٔ قبل ۱۵ واحد بیشتر است. مثلاً برای ثانیهٔ ۵ام داریم: مسافت طی شده از ابتدا تا ثانیهٔ ۵ام (برحسب متر) $= ۰+۱۵+۱۵+۱۵+۱۵+۱۵ = ۵\times ۱۵ = ۷۵$

جدول زیر رابطهٔ بین دو چیز یعنی «زمان» و «جابه‌جایی» را در حرکت این اتومبیل نشان می‌دهد:

زمان برحسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مسافت طی شده برحسب متر (d)	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰

مثال

در جدول مقابل فشار یک مایع در عمق‌های مختلف از سطح مایع آمده است. فشار مایع در عمق ۸ متر چقدر است؟ (m: (متر) واحد اندازه‌گیری فاصله و Pa: (پاسکال) واحد اندازه‌گیری فشار)

عمق (m)	۱	۲	۳	۴	۵
فشار (Pa)	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰	۱۱۰

۱) ۱۹۰ ۲) ۱۵۰
۳) ۱۷۰ ۴) ۱۳۵

پاسخ: با توجه جدول نسبت تغییرات فشار به تغییرات عمق ثابت و برابر ۲۰ است، می‌توانیم بگوییم به ازای هر یک متر که عمق زیاد می‌شود، ۲۰ واحد به فشار افزوده می‌شود.

یعنی در عمق ۶ متری فشار ۲۰ واحد بیشتر از عمق ۵ متری است، پس فشار برابر $P = ۲۰+۱۱۰ = ۱۳۰$ واحد خواهد بود.

به همین ترتیب در عمق ۷ متری فشار $P = ۲۰+۱۳۰ = ۱۵۰$ پاسکال است.

و در عمق ۸۲ متری فشار $P = ۲۰+۱۵۰ = ۱۷۰$ پاسکال است.

به همین ترتیب می‌توان فشار را در اعماق دیگر نیز حساب کرد.

گزینهٔ ۳ صحیح است.

متغیر مستقل و متغیر وابسته

در مثال اتومبیل، متغیر جابه‌جایی یا مسافت طی شده (d) یک متغیر وابسته به متغیر زمان (t) است. رابطهٔ بین t و d را در این مثال می‌توان به صورت $d = ۱۵t$ نوشت. پس در این مثال می‌توان متغیر d (مسافت طی شده) را برحسب متغیر t (زمان) به دست آورد.

در واقع می‌توان گفت تغییرات متغیر d تابعی از (وابسته به) تغییرات متغیر t است.

متغیر مستقل: متغیری که با تغییر آن، مقدار عبارت نوشته شده برحسب آن متغیر تغییر می‌کند و مقدار آن به مقادیر متغیرهای دیگر در آن عبارت جبری وابسته نیست، متغیر مستقل نامیده می‌شود.

متغیر وابسته: متغیری که مقادیر آن با تغییر یک متغیر یا متغیرهای دیگر تغییر می‌کند و یا به عبارت دیگر مقدارش وابسته به مقادیر متغیرهای دیگر است، متغیر وابسته نامیده می‌شود.

عدد ثابت در یک رابطه

اگر در مثال اتومبیل، در زمان شروع حرکت اتومبیل در فاصلهٔ ۲۰ متری از یک مکان مشخصی قرار داشت و در ادامهٔ مسیر مستقیم با همان سرعت ثابت ۱۵ متر بر ثانیه حرکت می‌کرد، می‌توانستیم فاصلهٔ اتومبیل را در هر لحظه، از آن مبدأ مشخص به کمک رابطهٔ $d = ۱۵t + ۲۰$ به دست آوریم.

کلمات کلیدی در این مثال: ۱- حرکت در مسیر مستقیم ۲- سرعت ثابت ۳- فاصلهٔ ۲۰ متری در زمان شروع حرکت، می‌باشند که با تغییر در هر کدام از این ۳ مورد رابطهٔ «متغیر وابستهٔ d برحسب متغیر مستقل t» تغییر می‌کند.

نکته در اصطلاح می‌گوییم d تابعی از t است و می‌نویسیم: $d(t) = ۱۵t + ۲۰$ ($d(t)$ یعنی d بر حسب x و آن را با $d\times t$ اشتباه نگیرید.)

مثال

اگر P محیط و S مساحت یک دایره باشد، کدام رابطه محیط دایره را به صورت تابعی از مساحت آن نشان می‌دهد؟

۱) $P(S)=۲\sqrt{S}$ ۲) $P(S)=\sqrt{\pi S}$ ۳) $P(S)=۲\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ ۴) $P(S)=۲\sqrt{\pi S}$

پاسخ: اگر R شعاع دایره باشد، مساحت آن برابر است با:

$$(\text{مساحت})S=\underset{\downarrow}{\pi}\ R^{۲}$$
(عدد پی ۳/۱۴)

از طرف دیگر محیط دایره برابر است با:

$$(\text{محیط})P=۲\ \underset{\downarrow}{\pi}\ R$$
(عدد پی ۳/۱۴)

خواستهٔ سوال: محیط دایره را به شکل تابعی از مساحت دایره نمایش دهیم بنابراین ابتدا شعاع دایره را بر حسب مساحت به دست می‌آوریم و مقدار به دست آمده را در رابطهٔ محیط جای‌گذاری می‌کنیم تا محیط بر حسب مساحت به دست آید:

$$S=\pi R^{۲}\Rightarrow\frac{S}{\pi}=R^{۲}\Rightarrow\sqrt{\frac{S}{\pi}}=R$$

$$P=۲\pi\ \underset{\sqrt{\frac{S}{\pi}}}{R}\Rightarrow P=۲\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}\Rightarrow P=۲\pi\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}=۲\pi\frac{\sqrt{S}\sqrt{\pi}}{\pi}=۲\sqrt{\pi S}$$

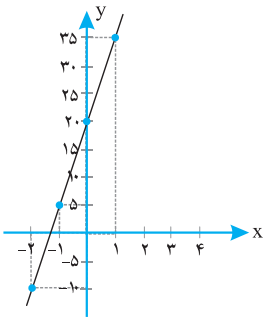
بنابراین $P(S)=۲\sqrt{\pi S}$.

گزینهٔ ۴ صحیح است.

مفهوم رابطه‌های خطی

به طور کلی اگر y تابعی از متغیر x باشد و رابطهٔ بین y و x به صورت $y=ax+b$ باشد که در این رابطه، a و b مقدارهای ثابت و مشخصی هستند؛ آنگاه رابطه‌هایی به صورت $y=ax+b$ را رابطه‌های خطی y بر حسب x می‌نامیم.

دلیل این نامگذاری این است که اگر نمودار این رابطه را در صفحهٔ مختصاتی رسم کنیم که متغیر افقی همان محور x و متغیر عمودی همان محور y باشد، شکل این نمودار به صورت یک خط راست است.



x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	−۱۰	۵	۲۰	۳۵	۵۰

در رابطهٔ $y=ax+b$، b را عرض از مبدأ می‌نامند.

عرض از مبدأ

عرض از مبدأ نقطه‌ای است روی محور y ها که نمودار تابع در آن نقطه، محور عرض‌ها را قطع می‌کند. مثلاً در مثال بالا عرض از مبدأ ۲۰ است.

مثال

یک شمع ۳۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت، ۵ سانتی‌متر می‌سوزد. پس از چند ساعت، شمع خاموش خواهد شد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ:

x ساعت	۰	۱	۲	۳
y ارتفاع برحسب سانتی‌متر	۳۰	۲۵	۲۰	۱۵
		−۵	−۵	−۵

در بازه‌های مختلف نسبت تغییرات ارتفاع به زمان ثابت است. بنابراین رابطهٔ ارتفاع برحسب زمان رابطه‌ای خطی است.

$$y=ax+b\xrightarrow{(۰,۳۰)}۳۰=a(۰)+b\Rightarrow b=۳۰$$
$$\xrightarrow{(۱,۲۵)}۲۵=a+۳۰\Rightarrow ۲۵-۳۰=a\Rightarrow a=-۵$$

زمانی شمع خاموش می‌شود که $y=۰$ شود، بنابراین:

$$y=-۵x+۳۰\xrightarrow{y=۰}۰=-۵x+۳۰\Rightarrow ۵x=۳۰\Rightarrow x=۶$$

نتیجه می‌گیریم که پس از ۶ ساعت، ارتفاع شمع صفر می‌شود، یعنی شمع خاموش می‌شود.

گزینهٔ ۳ صحیح است.

زوج مرتب

راه دیگر نمایش یک رابطه، نمایش آن به صورت زوج‌های مرتب است. اگر رابطهٔ متغیر وابستهٔ y برحسب متغیر مستقل x را به شکل (x,y) نمایش دهیم؛ چون ترتیب قرار گرفتن x و y در این زوج اهمیت دارد (سمت چپ، متغیر مستقل و سمت راست، متغیر وابسته را می‌نویسیم) آن را یک زوج مرتب می‌نامیم.

در زوج مرتب (x,y)، x را «مؤلفه یا مختص اول» و y را «مؤلفه یا مختص دوم» می‌نامیم.

نکته برای هر دو زوج مرتب (x,y) و (z,t) اگر $(x,y)=(z,t)$ آنگاه $x=z$ و $y=t$ و برعکس اگر $x=z$ و $y=t$ آنگاه $(x,y)=(z,t)$ و یا به صورت نماد ریاضی می‌توان نشان داد: $(x,y)=(z,t) \Leftrightarrow x=z\ ,\ y=t$

مثلاً در رابطهٔ $y=۱۵x+۲۰$ نمایش زوج مرتبی x و y برای بعضی از زوج‌های مرتب به صورت زیر خواهد بود:

$$\{\dots\ ,(-۲,-۱۰),(-۱,۵),(۰,۲۰),(۱,۳۵),(۲,۵۰),\dots\}$$

تذکر

توجه داشته باشید که در نمایش فوق فقط بعضی زوج مرتب‌هایی را نوشته‌ایم که متغیر مستقل x مقادیر اعداد صحیح را اختیار کرده‌اند و مقادیر y را فقط برای آن مقادیر x به دست آورده‌ایم و این مجموعه، نمایش تمام نقاط نیست.

مثال

اگر دو زوج مرتب $(a,۳b-۶)$ و $(۲a-۴\ ,\ ۳a)$ نمایش یک نقطه باشند، $۲a-b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: دو زوج مرتب $(a,۳b-۶)$، $(۲a-۴,۳a)$ نمایش یک نقطه هستند، پس این دو زوج مرتب با هم برابر بوده و در نتیجه مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان هم با هم برابرند:

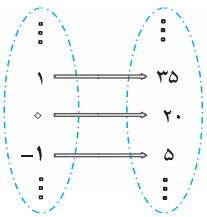
$$\begin{cases} ۲a-۴=a \Rightarrow a=۴ \\ ۳a=۳b-۶ \xrightarrow{a=۴} ۳(۴)=۳b-۶ \Rightarrow ۱۲+۶=۳b \Rightarrow b=۶ \end{cases}$$

$$۲a-b=۲(۴)-۶=۲ \quad \checkmark$$

خواسته سؤال $۲a-b$ است، پس:

گزینهٔ ۴ صحیح است.

نمودار وِن



می‌توان رابطهٔ بین متغیر مستقل x و متغیر وابستهٔ y را علاوه بر نمایش به صورت ضابطه‌ای (مثلاً $y=۱۵x+۲۰$)، نمایش جدولی، نمایش روی محورهای مختصات و همچنین زوج مرتبی، با استفاده از نمودار وِن یعنی به صورت نمایش پیکان‌هایی از متغیر مستقل به سمت متغیر وابسته نیز نشان داد. مثلاً نمودار وِن مربوط به رابطهٔ $y=۱۵x+۲۰$ به صورت روبه‌رو است.

روابط خطی و غیرخطی

رابطهٔ بین دو متغیر مستقل و وابسته مانند x و y در حالت کلّی الزاماً رابطهٔ خطی به شکل $y=ax+b$ نیست. در زیر چند نمونه از انواع روابط ریاضی بین متغیرهای x و y را مشاهده می‌کنید.

$$y=۵x+۸\ ,\ y^۲=۵x-۸\ ,\ x^۲+y^۲=۲۵\ ,\ y^۲+x^۲=x-۲\ ,\ x=\sqrt{y}+۲\ ,\ \sqrt{xy}=۵\ ,\ \frac{x+y}{y-۲}=x+۸\ ,\ y=\sqrt[۳]{x}-۵$$

در کلّ این فصل از این کتاب فقط رابطه‌هایی را بررسی می‌کنیم که به ازای هر متغیر مستقل مانند x، دقیقاً یک مقدار برای y به دست می‌آید.

تعریف تابع

یک رابطه بین دو مجموعهٔ A و B (از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B) یک تابع نامیده می‌شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعهٔ A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را بتوان مربوط کرد.

مثال

مثال: کدام‌یک از روابط زیر، بیانگر یک تابع نیست؟ (عبارتی که اول نوشته شده، مؤلفهٔ اول است.)

۱) رابطهٔ بین «افراد» و «ماشین مورد علاقه»
۲) رابطهٔ بین «مساحت دایره» و «شعاع آن»
۳) رابطهٔ بین «افراد» و «وزن آنها در یک زمان مشخص»
۴) رابطهٔ بین «افراد» و «سال تولدشان»

پاسخ: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: یک فرد می‌تواند چند ماشین را دوست داشته باشد. بنابراین این رابطه یک تابع نیست. گزینهٔ «۲»: از روی مساحت دایره تنها یک شعاع به دست می‌آید. گزینهٔ «۳»: هر فرد در یک زمان مشخص تنها یک وزن دارد. گزینهٔ «۴»: هر فرد تنها یک سال تولد دارد. بنابراین گزینهٔ ۱ تابع نیست.

نمایش‌های مختلف تابع

نمایش تابع به صورت زوج مرتب

اگر رابطهٔ بین متغیر مستقل x و متغیر وابستهٔ y را به صورت جدول یا زوج مرتب نمایش دهیم، در صورتی این رابطه یک تابع است که: هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه‌های اول برابر نداشته باشند. و این یعنی اگر مؤلفه‌های اول برابر باشند، دو زوج متمایز نباشند (یکسان باشند).

مثال

مثال: رابطهٔ $f=\{(۳,m^۲),(-۱,۳),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار m

پاسخ: یک تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نباشند و اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند، آن‌گاه باید مؤلفه‌های دوم آنها هم یکسان باشند. بنابراین از زوج مرتب‌های $(۳,m^۲)$ و $(۳,m+۲)$ به دلیل این‌که مؤلفه‌های اول‌شان با هم برابر است باید مؤلفه‌های دوم‌شان نیز برابر باشد. برای حل معادلهٔ درجه ۲ از روش Δ استفاده می‌کنیم.

$$m^۲=m+۲\Rightarrow m^۲-m-۲=۰$$

$$\text{ریشه‌های معادله}=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}=\frac{۱\pm\sqrt{۱-۴(۱)(-۲)}}{۲}=\frac{۱\pm۳}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۲\\-۱\end{cases}$$

این مقادیر را در رابطهٔ $f=\{(۳,m^۲),(-۱,۳),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

حالت اول: $m=۲$ $\quad f=\{(۳,۴),(-۱,۳),(-۲,۲),(۳,۴),(۲,۴)\}$

همان طور که مشاهده می‌کنیم رابطهٔ f تابع است.

حالت دوم: $m=-۱$ $\quad f=\{(۳,۱),(-۱,۳),(-۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۴)\}$

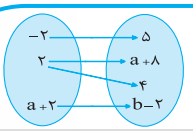
همان طور که مشاهده می‌کنیم در حالت دوم f تابع نیست زیرا ۲ زوج مرتب $(-۱,۴)$ و $(-۱,۳)$ به ازای مؤلفهٔ اول برابر مؤلفه‌های دومشان برابر نیست بنابراین تابع نیست. **گزینهٔ ۱ صحیح است.**

نمایش تابع به صورت نمودار ون

اگر رابطهٔ بین متغیرها را به صورت نمودار ون یا نمودار پیکانی از مجموعهٔ A، به مجموعهٔ B نمایش دهیم، در صورتی این رابطه یک تابع است که: از هر عضو از مجموعهٔ اول (ورودی) دقیقاً یک پیکان خارج شود.

مثال

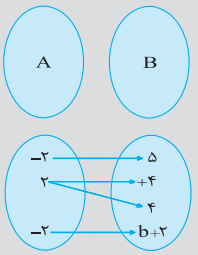
مثال: اگر نمودار پیکانی در شکل مقابل، مربوط به یک تابع باشد، مقدار $a+b$ چقدر است؟



۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: یک رابطه بین مجموعه‌های A و B که با نمودار پیکانی نمایش داده شده است، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شود. چون از عدد ۲ در نمودار پیکانی، ۲ پیکان خارج شده است، پس باید مقادیری که این پیکان‌ها از ۲ به آنها وارد می‌شوند یکسان باشند.بنابراین داریم:

$$a+۸=۴\Rightarrow a=-۴$$



در نمودار بالا با توجه به مقدار a چون دو عضو ۲- در مجموعهٔ A وجود دارد در نتیجه عضوهای متناظر آنها در مجموعهٔ دوم هم باید با هم برابر باشند.

$$b+۲=۵\Rightarrow b=+۳$$

خواستهٔ سؤال $a+b$ است بنابراین داریم:

$$a+b=-۴+۳=-۱$$

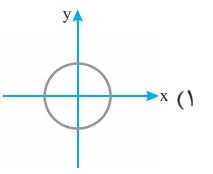
گزینهٔ ۲ صحیح است.

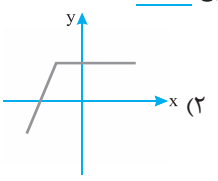
نمایش تابع به صورت نمودار در صفحه

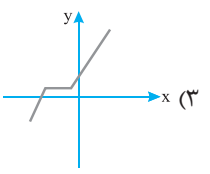
اگر رابطهٔ بین متغیرها را به صورت نمودار مختصاتی در صفحهٔ مختصات نمایش دهیم که محور xها، محور نمایش متغیر مستقل و محور yها، محور نمایش متغیر وابسته باشد، در صورتی این رابطه یک تابع است که: اگر هر خط موازی با محور yها رسم کنیم. نمودار سم شده را در بیش از یک نقطه قطع نکند و یا هیچ دو نقطه‌ای از نمودار روی هر خط عمود بر محور xها قرار نگیرند.

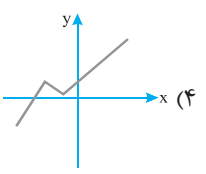
مثال

مثال: کدام شکل، نمودار یک تابع نیست؟

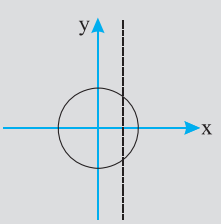
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: از نظر نموداری رابطه‌ای تابع خواهد بود که اگر هر خط موازی با محور yها رسم شود نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (یعنی هر خط موازی محور yها یا نمودار تابع را قطع نکند یا فقط در یک نقطه قطع کند.) مطابق توضیحات شکل «۱» تابع نیست، زیرا خطی موازی محور عرض‌ها می‌توان رسم کرد که نمودار را در دو نقطه قطع کند.



گزینهٔ ۱ صحیح است.

نمایش تابع به صورت ضابطه جبری

اگر رابطهٔ بین متغیرها را به صورت یک تساوی یا رابطهٔ ریاضی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه یک تابع است که: برای هر متغیر مستقل x، فقط و فقط یک مقدار برای y به دست آید که در رابطه صدق کند.

مثلاً در رابطهٔ $y^۲ = x$، اگر x متغیر مستقل باشد یک تابع نیست. زیرا برای $x = ۱$، از این تساوی دو مقدار ۱ و ۱- برای y به دست می‌آید.

مثال **مثال: کدام رابطه، یک تابع است؟**

۱) $\{(x,y) \mid x,y \in Q\ ,\ x^۲ + y^۲ = ۵\}$

۲) $\{(x,y) \mid x,y \in R\ ,\ x^۲ + y^۲ = ۵\}$

۳) $\{(x,y) \mid x,y \in Z\ ,\ x^۲ + y^۲ = ۵\}$

۴) $\{(x,y) \mid x,y \in N\ ,\ x^۲ + y^۲ = ۵\}$

پاسخ: اگر در تمام رابطه‌ها $x = ۱$ را انتخاب کنیم در این صورت: $x^۲ + y^۲ = ۵ \Rightarrow ۱^۲ + y^۲ = ۵ \Rightarrow y^۲ = ۴ \Rightarrow y = \pm ۲$

تنها در گزینهٔ «۴» بیان شده که $x,y \in N$ یعنی x و y هر دو مثبت هستند و در نتیجه به ازای هر xای که می‌دهیم، حداکثر یک y حاصل می‌شود، پس تابع خواهد بود.

گزینهٔ ۴ صحیح است.

تست‌های کنکور و تألیفی

درس اول ــ مفهوم تابع

مفهوم رابطه و زوج مرتب

۳۷۴- اگر مجموعهٔ $\{(a+b\ ,\ b+2),(2a-b\ ,\ 2b-6)\}$ فقط یک عضو داشته باشد، آن‌گاه: $a+b$ برابر است با: تألیفی
۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

۳۷۵- اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{2,5,6\}$ باشند، رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\ ,\ 2x\neq y\}$ چند زوج مرتب دارد؟ تألیفی
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۳۷۶- رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x,y\in N\ ,\ x+y\leq 5\}$ چند زوج مرتب دارد؟ تألیفی
۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶

۳۷۷- رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x,y\in N,2x+y\leq 7\}$، دارای چند زوج مرتب است؟ (ریاضی خارج از کشور ۸۸)
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۷۸- اگر $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,3,5\}$ باشند، رابطهٔ $R=\{(x,y\mid x\in B\ ,\ y\in A\ ,\ xy\neq 6\}$ چند عضو دارد؟ تألیفی
۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۳۷۹- مؤلفه‌های زوج‌های مرتب از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4\}$ طوری انتخاب می‌شوند که حاصل‌ضرب مؤلفه‌های هر زوج مرتب، عددی زوج و حاصل‌جمع آنها عددی فرد باشد. این مجموعه چند عضو دارد؟ تألیفی
۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۶

مفهوم رابطه و تابع

۳۸۰- به ازای کدام مقدار m، رابطهٔ $\{(5,m)\ ,\ (3,m+2)\ ,\ (m,1)\ ,\ (3,4)\}$ یک تابع است؟ سراسری - ۷۷
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۸۱- کدام‌یک از روابط زیر به ازای $m=-1$ یک تابع است؟ سراسری - ۷۶
۱) $\{(m,2m)\ ,\ (2m\ ,\ m)\ ,\ (-1\ ,\ 3m)\}$
۲) $\{(m,2m)\ ,\ (3m\ ,\ -1)\ ,\ (-1,3m)\}$
۳) $\{(m,2m)\ ,\ (2m\ ,m)\ ,\ (2m,-2)\}$
۴) $\{(m,2m)\ ,\ (2m\ ,\ m)\ ,\ (3,m)\}$

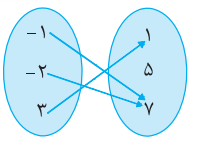
۳۸۲- در تابع f به صورت $f=\{(2,k^2-4),(2,5),(k+2\ ,\ 1),\ (5,2)\}$ مقدار k چقدر است؟ تألیفی
۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) -۳

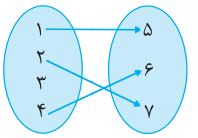
۳۸۳- اگر رابطهٔ $\{(a,2b),(a+2,3b),(a+2,a-b),(a,6)\}$ یک تابع باشد، $a-b$ کدام است؟ تألیفی
۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۶

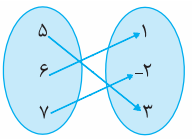
۳۸۴- اگر رابطهٔ $\{(-1,2b),(3,a^2+3),(a+1,4),(3,7)\}$ یک تابع باشد، $a-b$ کدام است؟ تألیفی
۱) ۴ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) صفر

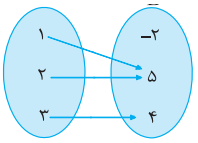
نمایش‌های مختلف یک تابع

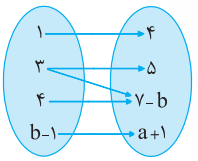
۳۸۵- کدام رابطه تابع نیست؟ تألیفی

۱)


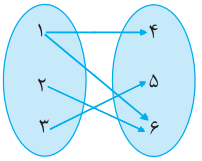
۲)


۳)


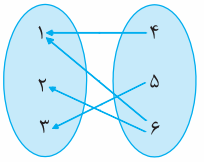
۴)


۳۸۶- اگر نمودار پیکانی مقابل مربوط به یک تابع باشد، مقدار ab کدام است؟ تألیفی


۱) ۱۰
۲) ۸
۳) ۴
۴) ۶

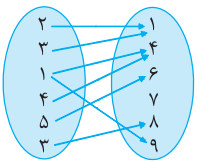
۳۸۷- رابطهٔ R با نمودار پیکانی به صورت زیر نمایش داده شده است. نمایش این رابطه به صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب کدام است؟ آیا این رابطه تابع است؟ تألیفی


۱) $\{(1,4),(1,6),(2,6),(3,5)\}$ ، بله
۲) $\{(1,4),(1,6),(2,6),(3,5)\}$ ، خیر
۳) $\{(4,1),(5,3),(6,1),(6,2)\}$ ، بله
۴) $\{(4,1),(5,3),(6,1),(6,2)\}$ ، خیر

۳۸۸- رابطهٔ R با نمودار پیکانی به صورت زیر نمایش داده شده است. نمایش این رابطه به صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب کدام است؟ آیان این رابطه تابع است؟ تألیفی


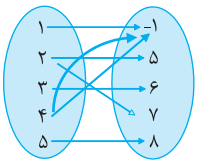
۱) $\{(1,4),(1,6),(2,6),(3,5)\}$ ، بله
۲) $\{(1,4),(1,6),(2,6),(3,5)\}$ ، خیر
۳) $\{(4,1),(5,3),(6,1),(6,2)\}$ ، بله
۴) $\{(4,1),(5,3),(6,1),(6,2)\}$ ، خیر

۳۸۹- چند پیکان از نمودار روبه‌رو حذف کنیم تا رابطه تبدیل به تابع شود؟ تألیفی



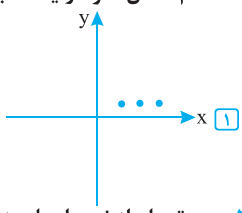
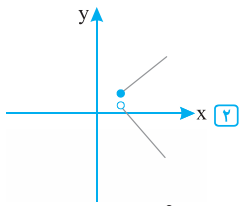
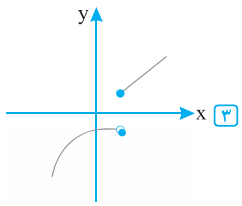
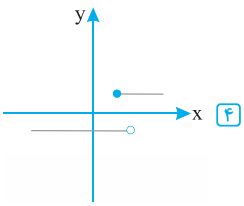
۱) دقیقاً ۲ پیکان
۲) حداقل ۳ پیکان
۳) دقیقاً ۱ پیکان
۴) حداکثر ۱ پیکان

۳۹۰- حداقل چند پیکان از نمودار پیکانی مقابل حذف کنیم تا رابطهٔ حاصل یک تابع باشد؟ تألیفی

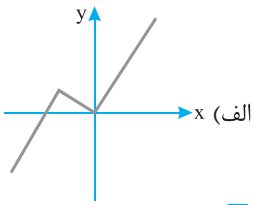
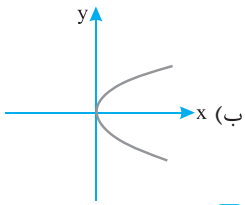
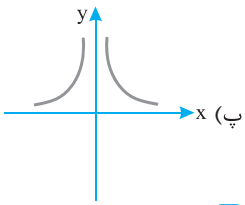
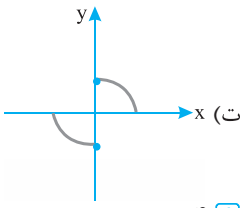


۱) ۲
۲) ۳
۳) ۱
۴) ۴

۳۹۱- کدام شکل نمودار یک تابع است؟ تألیفی

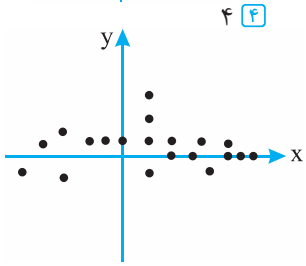
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۳۹۲- چه تعداد از نمودارهای زیر تابع هستند؟ تألیفی

الف) 
ب) 
پ) 
ت) 

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۹۳- نمودار یک رابطه به صورت مقابل می‌باشد با حذف حداقل چند نقطه تبدیل به یک تابع می‌شود؟ تألیفی

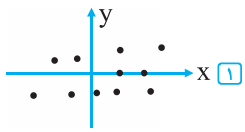


۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۳۹۴- در کدام رابطه، y تابعی از x نیست؟ تألیفی

۱) $\begin{array}{c|ccccc} x & 3 & 2 & 4 & \sqrt{4} & 5 \\ \hline y & 4 & 5 & 3 & \sqrt{25} & 3 \end{array}$
۲) $\begin{array}{c|ccccc} x & 3 & 2 & 5 & \sqrt{3} & \sqrt{9} \\ \hline y & -1 & 5 & 1 & 2 & -5 \end{array}$
۳) $\begin{array}{c|ccc} x & 2 & 4 & 3 \\ \hline y & 3 & 5 & 4 \end{array}$
۴) $\begin{array}{c|cccc} x & 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}$

۳۹۵- کدام‌یک تابع نیست؟ تألیفی

۱) 
۲) $\begin{array}{c|cccc} x & 2 & 5 & 3 & 4 \\ \hline y & 3 & 2 & 2 & 5 \end{array}$
۳) رابطهٔ بین محیط مربع و طول ضلع آن
۴) $\{(x,y)|x,y\in N, x+y=5\}$

درس ۲

ضابطهٔ جبری تابع

تعریف ضابطهٔ جبری یک تابع

اگر در نمایش یک تابع بتوانیم رابطهٔ بین مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب را به صورت یک ضابطه (قانون) بیان کنیم، به این رابطهٔ بین متغیرها ضابطهٔ جبری تابع می‌گویند.

به عنوان مثال در تابع $f=\{(۱,۱),(۲,۴),(۴,۱۶),(۶,۳۶)\}$ می‌توان با به توان ۲ رساندن مؤلفهٔ اول هر زوج مرتب، مؤلفهٔ دوم آن زوج را به دست آورد. به عبارت دیگر اگر زوج (x,y)، عضوی از تابع f باشد آنگاه رابطهٔ $y=x^۲$، بین x و y برقرار است. معادلهٔ $y=x^۲$ را ضابطهٔ تابع f می‌نامیم.

تابع به عنوان یک ماشین

اگر تابع f را به عنوان یک ماشین و متغیر مستقل x را ورودی این ماشین در نظر بگیریم، تأثیر تابع f روی x را با $f(x)$ نشان می‌دهیم که حاصل آن همان متغیر وابستهٔ y است یعنی $f(x)=y$.

تعریف ضابطه‌ای تابع، دامنه و برد

یک تابع مانند f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، قانون یا ضابطه‌ای است که به هر عضو از مجموعهٔ A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را نسبت دهد و می‌نویسیم: $\begin{matrix} f:A\to B \\ f(x)=y \end{matrix}$، که در آن $y=f(x)$ را ضابطهٔ تابع، مجموعهٔ A را دامنهٔ تابع و مجموعهٔ تمام مقادیر $f(x)$ را برد تابع می‌نامیم. دامنهٔ تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نشان می‌دهیم.

مثال

دامنهٔ تابع $y=\frac{x+۳}{x^۲-۹}$ کدام است؟

۱) R ۲) $R-\{-۳,۳\}$ ۳) $R-\{۳\}$ ۴) $R-\{-۳\}$

پاسخ: در توابع کسری، مخرج کسر نباید صفر شود. $x^۲-۹=۰ \Rightarrow x=\pm ۳$، بنابراین دامنهٔ تابع برابر $R-\{-۳,۳\}$ است.

تذکر: برای تعیین دامنهٔ یک تابع، به هیچ وجه ضابطهٔ تابع را ساده نکنید. به عنوان مثال نباید گفت:

این روش کاملاً غلط است. $y=\frac{x+۳}{x^۲-۹}=\frac{x+۳}{(x-۳)(x+۳)}=\frac{۱}{x+۳} \Rightarrow D_f=R-\{۳\}$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

مثال

در تابع $\begin{matrix} f:A\Rightarrow B \\ f(x)=۲x^۳-۱ \end{matrix}$ اگر $A=\{-\sqrt[۳]{۲},-۱,\frac{۱}{۳},۲,\Delta\}$، مجموعهٔ برد تابع را به دست آورید و تابع f را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

$f(x)=۲x^۳-۱$

پاسخ:

$f(-\sqrt[۳]{۲})=۲(-\sqrt[۳]{۲})^۳-۱=۲\times(-۲)-۱=-۴-۱=-۵$

$f(-۱)=۲(-۱)^۳-۱=۲\times(-۱)-۱=-۲-۱=-۳$

$f(۲)=۲(۲)^۳-۱=۲\times ۸-۱=۱۶-۱=۱۵$

$f(\frac{۱}{۳})=۲(\frac{۱}{۳})^۳-۱=۲\times\frac{۱}{۲۷}-۱=\frac{۲}{۲۷}-\frac{۲۷}{۲۷}=\frac{-۲۵}{۲۷}$

$f(\Delta)=۲(\Delta)^۳-۱=۲\Delta^۳-۱$

مجموعهٔ مقادیر یا برد تابع: $f(A)=R_f=\{-۵,-۳,\frac{-۲۵}{۲۷},۱۵,۲\Delta^۳-۱\}$

نمایش تابع f به صورت زوج مرتب: $f=\{(-\sqrt[۳]{۲},-۵),(-۱,-۳),(\frac{۱}{۳},\frac{-۲۵}{۳}),(۲,۱۵),(\Delta,۲\Delta^۳-۱)\}$

مثال

نمایش جبری تابع f با دامنهٔ $\{۱,۲,۳\}$ به صورت $f(x)=\frac{۱-۲x}{۳}$ می‌باشد، کدام‌یک از اعداد زیر در برد تابع f قرار ندارد؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۵}{۳}$ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

پاسخ: ورودی (دامنه) $\{۱,۲,۳\}$ ← تابع $\frac{۱-۲x}{۳}$ ← خروجی (برد)

$۱ \longrightarrow \frac{۱-۲\times(۱)}{۳}=\frac{-۱}{۳}$

$۲ \longrightarrow \frac{۱-۲\times(۲)}{۳}=-۱$

$۳ \longrightarrow \frac{۱-۲\times(۳)}{۳}=\frac{-۵}{۳}$

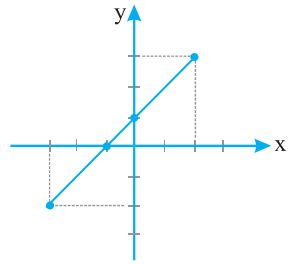
$\Rightarrow \xrightarrow{\text{برد}} \{-\frac{۱}{۳},-۱,\frac{-۵}{۳}\}$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

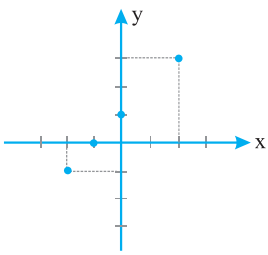
مثال

برای هریک از توابع زیر، دامنه و برد را مشخص کنید. در صورت امکان ضابطهٔ هر تابع را بنویسید و برای هر یک از توابع، نمایش‌های مختصاتی، زوج مرتبی، جدولی و نمودار وِن هر یک را رسم کنید.

الف)



ب)

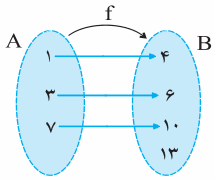


پ)

x	−۲	−۱	۰	۱	۲	۲/۵
y	۳	۰	−۱	۰	۳	۵/۲۵

ت) $f=\{(-1,-4),(1,0),(\sqrt{2},2\sqrt{2}-2)\}$

ث)



پاسخ: الف) نمودار این تابع یک نمودار خطی است، پس کافی است برای پیدا کردن ضابطهٔ این تابع برای یک نقطهٔ دلخواه رابطهٔ بین طول و عرض آن نقطه را پیدا کنیم. مثلاً نقطهٔ $(2,3)$ را در نظر می‌گیریم و در رابطهٔ $y=ax+b$ به جای x مقدار ۲ و به جای y مقدار ۳ را قرار می‌دهیم. پس خواهیم داشت $3=a\times 2+b$. چون b عرض از مبدأ است پس طبق نمودار تابع، مقدار آن برابر با ۱ خواهد بود، پس خواهیم داشت: $\boxed{a=1}$ $\Rightarrow 2=2a \Rightarrow 3-1=2a \Rightarrow 3=2a+1 \xrightarrow{b=1} 3=2a+b$

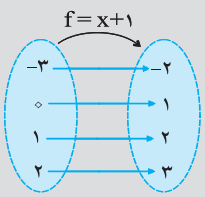
با توجه به یافتن مقدار a و b در رابطهٔ $y=ax+b$ پس معادلهٔ خط برابر خواهد شد با: $y=ax+b \Rightarrow y=x+1$

راه دیگر پیدا کردن معادلهٔ خط، استفاده از دو نقطه از آن خط است که به کمک آن دو نقطه، شیب خط را به دست می‌آوریم و در رابطهٔ $y-y_1=m(x-x_1)$ جایگذاری می‌کنیم.

مثلاً به کمک نمودار، دو نقطهٔ دلخواه $(2,3)$ و $(0,1)$ را در نظر می‌گیریم، خواهیم داشت: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-1}{2-0}=1$

در نتیجه: $y-(3)=1(x-2) \Rightarrow y-3=x-2 \Rightarrow y=x+1$

که با این روش نیز به همان جواب قبل رسیدیم.



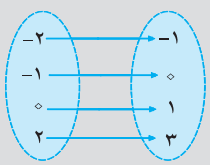
برای پیدا کردن دامنهٔ تابع از روی نمودار، مقدارهایی از محور xها که تابع برای آن مقادیر تعریف شده‌اند جواب ما خواهد بود، پس طبق شکل مجموعهٔ تمام اعداد بین ۳- و ۲ دامنهٔ نمودار «الف» می‌باشد. یعنی: $D_f=\{x\in\mathbb{R};-3\le x\le 2\}$ (بخوانید xهایی عضو مجموعهٔ اعداد حقیقی به طوری‌که x، بزرگ‌تر یا مساوی ۳- و کوچکتر یا مساوی ۲ باشد) و برد تابع f نیز برابر است با: $R_f=\{y\in\mathbb{R};-2\le y\le 3\}$ (مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بین ۲- و ۳). حال می‌خواهیم نمودار تابع «الف» را به صورت زوج مرتبی، جدولی و نمودار وِن نمایش دهیم.

این کار به طور دقیق امکان‌پذیر نیست زیرا در نمودارهای جدولی و نمودار وِن و همچنین زوج مرتبی ما باید تمام زوج‌های مرتب را مشخص کنیم. اما این کار برای تابعی که **تمام نقاط آن به هم پیوسته هستند** امکان‌پذیر نیست. زیرا اگر هر دو عددی را از مجموعهٔ دامنهٔ تابع پیدا کنیم باز هم عددی بین آن دو عدد انتخاب شده وجود دارد که ما در جدول و نمودار آن را نیاورده‌ایم. در زیر این نمودارها را برای برخی از نقاط رسم می‌کنیم.

$f:\{(-3,-2),\ldots,(-2/5,-1/5),\ldots,(0,1),\ldots,(1,2),\ldots,(2,3)\}$

x	−۳	−۲	−۱	−۰/۵	۰	۱	۱/۵	۲
$y=x+1$	−۲	−۱	۰	۰/۵	۱	۲	۲/۵	۳

ب) طبق نمودار رسم شده این تابع شامل ۴ عضو یا ۴ زوج مرتب است، پس می‌توانیم بنویسیم:



$f=\{(-2,-1),(-1,0),(0,1),(2,3)\}$

$D_f=\{-2,-1,0,2\}$ $\quad R_f=\{-1,0,1,3\}$

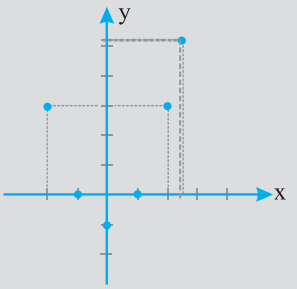
با توجه به مقادیر داده شده در شکل می‌توانیم ببینیم که مقدار $f(x)$ به ازای هر x از رابطهٔ $f(x)=x+1$ به دست می‌آید (در هر نقطه برای پیدا کردن y کافی است به مقدار x یک واحد اضافه کنیم). سپس نمودار جدولی نیز برای این تابع به صورت زیر است:

x	−۲	−۱	۰	۲
$f(x)=y=x+1$	−۱	۰	۱	۳

ضابطهٔ این تابع با ضابطهٔ تابع «الف» برابر بود، اما تفاوت این دو تابع تفاوت در مجموعه‌های دامنه و برد این توابع می‌باشد که دامنهٔ تابع «الف» مجموعه‌ای نامتناهی عضو داشت ولی دامنهٔ تابع «ب» فقط ۴ عضو دارد.

پ) با توجه به جدول داده شده به راحتی می‌توان نمودارهای زوج مرتبی، مختصاتی و نمودار ون مربوط به آن را رسم کرد. با رسم نمودار مختصاتی معمولاً راحت‌تر می‌توان ضابطهٔ تابع را پیدا کرد. با توجه به نمودار متوجه می‌شویم که نمودار تابع خطی نیست.

$$f:\{(-۲,۳),(-۱,۰),(۰,-۱),(۱,۰),(۲,۳),(۲/۵,۵/۲۵)\}$$



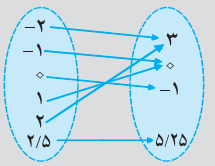
با توجه به نقاط داده شده، اگر مقدار x هر نقطه را به توان ۲ برسانیم و از حاصل یک واحد کم کنیم مقدار y یا $f(x)$ آن نقطه به دست می‌آید، سپس ضابطهٔ این تابع برابر است با:

$$f(x)=y=x^{۲}-۱$$

و مجموعه‌های دامنه و برد این تابع به صورت زیر خواهند بود:

$$D_f=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۲/۵\}\quad R_f=\{۳,۰,-۱,۵/۲۵\}$$

نمودار ون مربوط به این تابع به صورت روبه‌رو است:



تذکر: در این تابع برای هریک از مقادیر ۳ و ۰ از مجموعهٔ برد، دو مقدار متناظر از مجموعهٔ دامنه وجود دارد که این مسئله هیچ خللی در تابع بودن ایجاد نمی‌کند. امّا اگر برای بعضی از مقادیر در مجموعهٔ دامنه، دو یا چند مقدار از مجموعهٔ برد نظیر می‌شد آنگاه نمودار یک تابع نبود.

نتیجه: اگر در یک تابع مجموعه‌های دامنه و برد قابل شمارش باشند آنگاه تعداد اعضای مجموعهٔ دامنه بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای مجموعهٔ برد است.

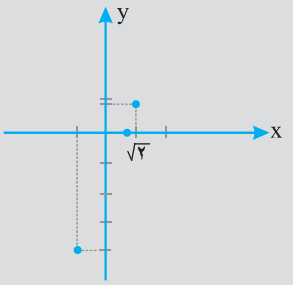
سؤال: چند تابع از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی می‌توان به کمک نمودار ون رسم کرد؟

پاسخ این سوال را در قسمت بعد مفصل خواهیم گفت.

ت) در تابع $f=\{(-۱,-۴),(۱,۰),(\sqrt{۲},۲\sqrt{۲}-۲)\}$ به وضوح مجموعه‌های دامنه و برد برابراند با:

$$D_f=\{-۱,۱,\sqrt{۲}\}$$
$$R_f=\{-۴,۰,۲\sqrt{۲}-۲\}$$

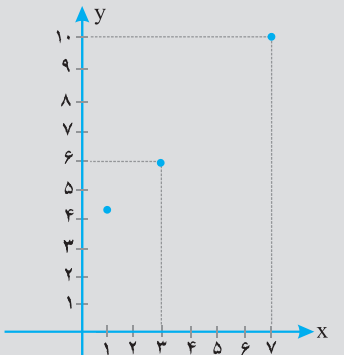
و با توجه به رابطهٔ بین x و $f(x)$ ضابطهٔ این تابع برابر است با $f(x)=۲x-۲$ اگر نمودار مختصاتی مربوط به این تابع را رسم کنیم مشاهده می‌کنیم که تمام این نقاط روی یک خط هستند که می‌توان به کمک مختصات دو نقطه از آنها به راحتی مثل قسمت «الف» معادلهٔ خط را به دست آورد و به جواب $f(x)=y=۲x-۲$ رسید. رسم نمودار جدولی و نمودار ون نیز برای این تابع به راحتی امکان‌پذیر است.



x	-۱	۱	$\sqrt{۲}$
$F(x)=۲x-۲$	-۴	۰	$۲\sqrt{۲}-۲$

ث) در این تابع با توجه به نمودار ون، نمایش زوج مرتبی به صورت $f=\{(۱,۴),(۳,۶),(۷,۱۰)\}$ خواهد بود که با رسم نمودار مختصاتی آن و نمودار جدولی داریم:

x	۱	۳	۷
$f(x)$	۴	۶	۱۰



نکته: برای آنکه بدانیم سه نقطه روی یک خط قرار دارند یا خیر، بهترین کار این است که به کمک دو نقطه از این سه نقطه معادلهٔ خط گذرنده از این دو نقطه را بنویسیم. اگر مختصات نقطهٔ سوم در معادلهٔ خط به دست آمده صدق کرد آن سه نقطه روی یک خط هستند و اگر صدق نکرد سه نقطه روی یک خط قرار ندارند.

اگر در این تابع فرض کنیم $A(۱,۴)$، $B(۳,۶)$ و $C(۷,۱۰)$ باشد آنگاه، معادلهٔ خط گذرنده از نقاط A و B را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۴-۶}{۱-۳}=\frac{-۲}{-۲}=۱$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-۴=۱(x-۱)\Rightarrow y-۴=x-۱\Rightarrow \boxed{y=x+۳}$$

حال نقطهٔ $C(۷,۱۰)$ را در معادلهٔ به دست آمده قرار می‌دهیم:

$$y=x+۳\Rightarrow ۱۰=۷+۳\Rightarrow ۱۰=۱۰\checkmark$$

چون تساوی برقرار شد پس هر سه نقطه روی خط $y=x+۳$ قرار دارند. پس ضابطهٔ تابع برابر است با: $y=f(x)=x+۳$

با دقت در نمودار ون این تابع ملاحظه می‌کنید که هیچ فلشی به عدد ۱۳ در مجموعهٔ B وارد نشده است؛ اما این موضوع در تابع بودن f خللی وارد نمی‌کند زیرا برای تابع بودن لازم است که از تمامی اعضای مجموعهٔ A یک و تنها یک فلش خارج شود و تنها بودن مقدار یا مقادیری در مجموعهٔ B اشکالی در تابع بودن به وجود نمی‌آورد. دامنه و برد این تابع برابر است با:

$$D_f=\{۱,۳,۷\}\qquad R_f=\{۴,۶,۱۰\}$$

به مجموعهٔ B که در اینجا برد تابع زیر مجموعه‌ای از آن است «هم‌دامنه» می‌گویند.

نکته: مجموعهٔ A همواره با دامنه برابر است اما مجموعهٔ دوم یعنی B می‌تواند اعضایی بیشتر از برد تابع را داشته باشد که آن اعضاء تصویر هیچ‌یک از اعضای دامنهٔ تابع نباشند.

مثال

برد تابع $y = x^2 + 2$ کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $[2,+\infty)$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $[0,2]$

پاسخ:

برد تابع $[2,+\infty)$.

$$y = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + 2 \quad \geq 2$$

تذکر: x^2 همیشه مثبت و بزرگتر از صفر است زمانی که با ۲ جمع می‌شود برد آن بزرگتر مساوی دو می‌شود.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

مثال

برد تابع $y = x^2 - 2x + 5$ کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[4,\infty)$ ۳) $(4,\infty)$ ۴) $[-2,2]$

پاسخ:

یکی از ایده‌ها برای پیدا کردن برد تابع، مربع کامل کردن است.

$$y = x^2 - 2x + 5$$
$$y = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2 \geq 0} + 4 \quad \geq 4$$

بنابراین برد تابع $[4,+\infty)$ است.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

مثال

نمایش جبری تابع f با برد $\{4, \frac{11}{5}, 2, 1\}$ به صورت $f(x) = \frac{2+3x}{5}$ می‌باشد، کدام‌یک از اعداد زیر در دامنهٔ f قرار ندارد؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۶

پاسخ:

ورودی (دامنه) ⟵ تابع $\frac{2+3x}{5}$ ⟵ خروجی (برد) $\{1, 2, \frac{11}{5}, 4\}$

$$\frac{2+3x}{5} = 1 \Rightarrow 2+3x = 5 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$
$$\frac{2+3x}{5} = 2 \Rightarrow 2+3x = 10 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$
$$\frac{2+3x}{5} = \frac{11}{5} \Rightarrow 2+3x = 5(\frac{11}{5}) \Rightarrow 3x = 11-2 \Rightarrow x = 3$$
$$\frac{2+3x}{5} = 4 \Rightarrow 2+3x = 20 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$$

بنابراین دامنهٔ تابع برابر است با: $D_f = \{1, \frac{8}{3}, 3, 6\}$

گزینهٔ ۳ صحیح است.

تعداد توابع از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی

مثال

چند تابع از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی می‌توان به کمک نمودار وِن رسم کرد؟

پاسخ: اولاً باید از تمام اعضای مجموعهٔ دامنه که n عضو دارد فلشی خارج شود و حتماً یک فلش خارج شود، نه بیشتر و نه کمتر.
اما هر فلش می‌تواند به هر یک از اعضای مجموعهٔ برد که m عضو دارد وارد شود.
پس برای هر عضو از دامنه، m انتخاب داریم. حال اگر عضو دیگری از مجموعهٔ دامنه را انتخاب کنیم آنگاه باز هم برای این عضو m انتخاب وجود دارد.
زیرا برای دو عضو متفاوت از مجموعهٔ دامنه می‌توان یک عضو مشترک از مجموعهٔ برد را نظیر کرد.
به همین ترتیب برای تک‌تک اعضای دامنه نیز m انتخاب وجود دارد پس تعداد توابع برابر خواهد بود با:

تعداد توابع از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی $= \underbrace{m \times m \times \ldots \times m}_{n \text{ تا}} = m^n$

تعداد اعضای مجموعهٔ برد، به توان تعداد اعضای مجموعهٔ دامنه =

مثال

در سؤال قبل اگر برای هر تابع شرط آنکه $f(x)$ها برای هر تابع تکراری نباشد را داشتیم؛ یعنی به ازای هـر x از مجموعـهٔ دامنه، $f(x)$ منحصر به فرد باشد، آنگاه تعداد کل توابع چقدر است؟

پاسخ: اولاً باید از تمام اعضای مجموعهٔ دامنه (که n عضو دارد) فلشی خارج شود و فقط یک فلش خارج شـود؛ پـس بـرای عضـو اول از مجموعهٔ دامنه، m انتخاب وجود دارد. اما برای عنصر دوم از دامنه یک انتخاب کم می‌شود، پس برای این عضو $m-1$ انتخاب داریم، به همین ترتیب برای عضو سوم و چهارم و ... از دامنه نیز در هر مرتبه یک واحد از تعداد انتخاب‌ها کم می‌شود. پس می‌توانیم بنویسیم:

تعداد توابع از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی به شرطی که برای هر تابع تصویر هر عضو از مجموعهٔ دامنه، تکراری نباشد.

$$\underset{\text{عضو اول}}{m} \times \underset{\text{عضو دوم}}{(m-1)} \times \underset{\text{عضو سوم}}{(m-2)} \times \ldots \times \underset{\text{عضو n ام}}{(m-(n-1))}$$

نکته: برای عضو nام از مجموعهٔ دامنه، در این حالـت $n-1$ عضـو از مجموعـهٔ بـرد قـبلاً انتخـاب شـده‌انـد، پـس بـرای ایـن عضو $m-(n-1)=m-n+1$ انتخاب داریم.

مثال

اگر اعضای زوج مرتب‌ها از مجموعهٔ $V=\{1,2,3,4\}$ انتخاب شوند، تعداد زوج مرتب‌هایی که مؤلفه اول آنها از مؤلفـه دوم آنها بزرگ‌تر باشد، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۱۲

پاسخ: زوج مرتب‌ها را به فرم (a,b) انتخاب می‌کنیم، به دنبال زوج‌هایی هستیم که در آنها مقـدار a از b بـزرگ‌تـر باشـد؛ مـثلاً $(4,1)$ جواب است ولی $(4,4)$ جواب نیست.

اگر a برابر ۴ باشد برای b سه حالت (۱و۲و۳) ممکن است. $a=4 \Rightarrow b=\begin{cases}1\\2\\3\end{cases}$

اگر a برابر ۳ باشد برای b دو حالت (۱و۲) ممکن است. $a=3 \Rightarrow b=\begin{cases}1\\2\end{cases}$

اگر a برابر ۲ باشد برای b یک حالت (۱) ممکن است. $a=2 \Rightarrow b=\{1\}$

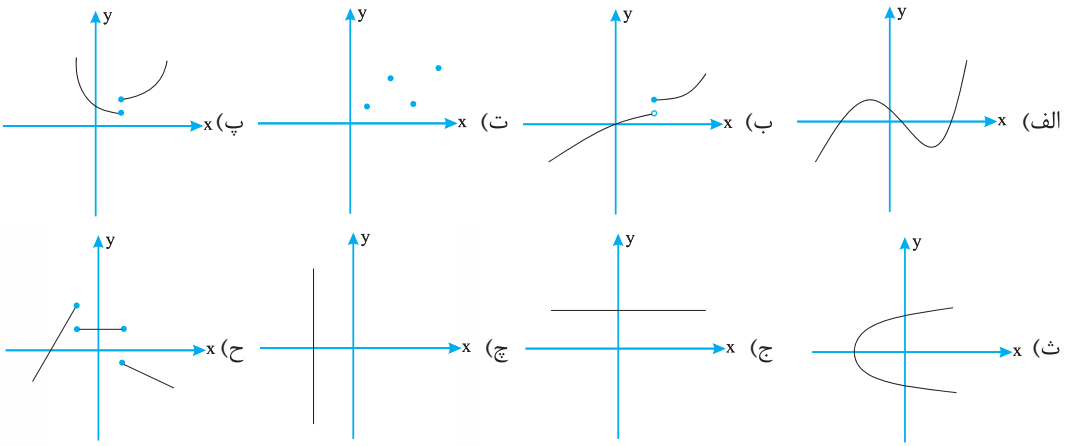
اگر a برابر ۱ باشد برای b هیچ حالتی ممکن نیست. $a=1 \Rightarrow b \Rightarrow$ هیچ حالت

جمع تمام حالات: شش حالت $\{(4,1),(4,2),(4,3),(3,1),(3,2),(2,1)\}$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

تشخیص تابع از روی نمودار

تمرین کدام‌یک از نمودارهای زیر نمایش یک تابع می‌باشد؟

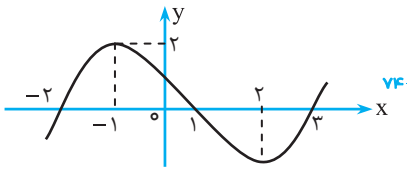


پاسخ: همان‌طور که گفته شد برای تشخیص تابع بودن یک نمودار در صفحهٔ مختصات، باید هر خط فرضی که موازی محور yها رسم می‌کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. با این توضیح نمودارهای «پ»، «ث»، «چ» و «ح» تابع نیستند زیرا در این نمودارها برای برخی مقادیر x در دامنهٔ تابع بیش از یک مقدار برای $y=f(x)$ یافت می‌شود.

تست‌های کنکور و تألیفی

درس دوم ــ ضابطهٔ جبری تابع

محاسبهٔ مقدار تابع



۳۹۶- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، $f(-1)$ چقدر است؟ سراسری - ۷۴

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۲

۳۹۷- در تابع $f=\{(1,4),(4,2),(3,1),(2,3)\}$، مقدار $2f(2)-f(4)$ کدام است؟ سراسری - ۷۶

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۳۹۸- در تابع $f=\{(2,m+n),(3,2m-b),(5,7),(2,b-2),(6,b+m+n)\}$ اگر $(2,6)\in f$ باشند، مقدار $f(6)$ کدام است؟ تألیفی

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

۳۹۹- در تابع $f(x)=4x-\sqrt{1+2x}$، مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟ سراسری - ۷۹

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۴۰۰- اگر $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+2}$ مقدار $f(2)-f(-2)$ کدام است؟ سراسری - ۷۴

۱) $\frac{10}{6}$ ۲) $\frac{8}{6}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۴۰۱- تابع با ضابطهٔ $f(x)=2x+5$ مفروض است. اگر $f(3)-2f(m)=3f(-2)$ باشد، m کدام است؟ تألیفی

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۴۰۲- اگر $f(x)=x+\frac{2}{x}$ باشد، مقدار $f(1+\sqrt{2})+f(1-\sqrt{2})$ کدام است؟ سراسری خارج کشور - ۹۰

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۰۳- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x+3$ حاصل $f(1+\sqrt{2})-f(2)$ کدام است؟ سراسری - ۹۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۰۴- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{-2x^2+8x+7}$، مقدار $f(2-\sqrt{3})$ کدام است؟ سراسری - ۹۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۴۰۵- اگر $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+12}$، آن‌گاه $f(2+\sqrt{7})-f(2)$ کدام است؟ سراسری - ۸۸

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۰۶- اگر $f(x)=\frac{2x^2+2}{x^2-3}$ باشد، مقدار $f(2-\sqrt{3})$ کدام است؟ سراسری - ۹۰

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $-2+\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

۴۰۷- اگر $f(x)=\frac{-2x^2+5x}{x-2}$ باشد، $f(1-\sqrt{2})$، کدام است؟ سراسری - ۹۳

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $1+\sqrt{2}$

۴۰۸- اگر $f(x)=\sqrt{x^2-7}$ باشد، $f(4)-f(2\sqrt{2})$، کدام است؟ سراسری - ۹۵

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰۹- مقدارهای دو تابع $f(x)=x^2-x$ و $f(x-1)$ در «چه نقطه‌ای» با هم مساوی می‌شوند؟ تألیفی

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۱۰- اگر $f(x)=-x^2+3x$، حاصل $f(x+2)-f(2)$ کدام است؟ سراسری - ۸۵

۱) $-x^2-x$ ۲) $-x^2+x$ ۳) $-x^2-x+1$ ۴) $-x^2+x-1$

۴۱۱- اگر $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-1}$، آن‌گاه $\frac{1}{3}f(0)+f(2x+1)$ کدام است؟ سراسری - ۸۹

۱) $\frac{1}{x^2+x}$ ۲) $\frac{1}{x^2-x}$ ۳) $\frac{2}{x^2+x}$ ۴) $\frac{2}{x^2-x}$

۴۱۲- اگر $f(x)=\frac{-۱}{۲}x^۲+۲x$، آن‌گاه $f(x+۲)-f(x)$ کدام است؟ ..... سراسری خارج کشور - ۸۸

۱) $-۲x+۲$ ۲) $۲x-۲$ ۳) $۲x$ ۴) ۲

۴۱۳- اگر $f(x)=x^۲-۳x+۲$، آن‌گاه $f(x+۲)-f(x-۲)$ کدام است؟ ..... سراسری خارج کشور - ۸۹

۱) $۴(x-۳)$ ۲) $۴(x-۲)$ ۳) $۴(۲x-۱)$ ۴) $۴(۲x-۳)$

۴۱۴- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$، حاصل $f(x).f(\frac{۱}{x})$ کدام است؟ ..... تألیفی

۱) $\frac{x}{۱+x^۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱+x^۲}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ ۴) $\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$

محاسبهٔ ضابطهٔ تابع

۴۱۵- اگر $f=\{(۱,۰),(-۱,۰),(۰,-۱)\}$ ، $y=f(x)$ باشد، در مورد ضابطهٔ f کدام گزینه درست است؟ ..... تألیفی

۱) $y=x^۲-۱$ ۲) $y=x^۲+۱$ ۳) $x=y^۲-۱$ ۴) $x=y^۲+۱$

۴۱۶- با توجه به جدول زیر اگر رابطهٔ بین x و $f(x)$ را به صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ در نظر بگیریم، $a+b+c$ برابر است با: ..... تألیفی

x	۰	۱	۲	۳	۴
f(x)	۲	۱	۲	۵	۱۰

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۱۷- نمایش ضابطهٔ تابعی که قطر مکعب (D) را برحسب مساحت جانبی (S) آن نمایش می‌دهد، کدام است؟ ..... تألیفی

۱) $D=\sqrt{۳S}$ ۲) $D=\frac{\sqrt{۳S}}{۲}$ ۳) $D=\sqrt{\frac{S}{۳}}$ ۴) $D=\sqrt{\frac{۳S}{۲}}$

۴۱۸- با توجه به ضابطهٔ تابع نمایش داده شده به صورت جدول، $f(۱)$ برابر است با: ..... تألیفی

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۳	۷	۱۳	۲۱	۳۱

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

تابع به عنوان ماشین

۴۱۹- اگر $f(x)=۵f(x-۱)$ و $f(۱)=۵$، مقدار $f(۸)$ چقدر است؟ ..... تألیفی

۱) $۵^۵$ ۲) $۵^۷$ ۳) $۵^۹$ ۴) $۵^۸$

۴۲۰- اگر به ازای هر x و y رابطهٔ $f(x+y)=\frac{f(y)}{f(x)}$ برقرار باشد، مقدار $f(\frac{۲}{۵})$ چقدر است؟ ..... تألیفی

۱) ۷ ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۴۲۱- اگر $f(۳x-۲)+۳f(۴)=۴x-۶$ مقدار $f(۳)$ چقدر است؟ ..... تألیفی

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $-\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۵}{۶}$

۴۲۲- اگر $f(x+۲)=\frac{۲x-۶}{x+۴}$ حاصل $f(۲x)$ کدام است؟ ..... تألیفی

۱) $\frac{۲x-۵}{x+۱}$ ۲) $\frac{۲x+۵}{x+۱}$ ۳) $\frac{۲x+۵}{x-۱}$ ۴) $\frac{۲x-۵}{x-۱}$

۴۲۳- اگر $f(۳x-۱)=۹x^۲+۳$، ضابطهٔ تابع $f(x-۲)$ کدام است؟ ..... تألیفی

۱) $x^۲-۲x-۴$ ۲) $x^۲+۲x+۴$ ۳) $x^۲-۲x+۴$ ۴) $x^۲+۲x-۴$

۴۲۴- اگر $f(\frac{x-۳}{x+۱})=۳x+۲$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟ ..... تألیفی

۱) $\frac{۱۱-x}{۱-x}$ ۲) $\frac{۱۱+x}{۱-x}$ ۳) $\frac{۱-x}{۱۱+x}$ ۴) $\frac{x+۱}{x-۱}$

۴۲۵- اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+۲+\frac{۱}{x^۳}$ آنگاه $f(۲x)$ کدام است؟ ..... تألیفی

۱) $۸x^۳-۴x+۲$ ۲) $۸x^۳-۶x+۲$ ۳) $۸x^۳+۶x+۲$ ۴) $۸x^۳+۴x+۲$

دامنه و برد تابع

۴۲۶- رابطهٔ مقابل بیانگر تابعی با دامنهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ و برد $\{۴,۵,۶,۷\}$ است. $a-b$ کدام است؟ $(a,b>۰)$ ..... تألیفی

ورودی	۱	۲	$a^۲-۶$	۴
خروجی	$۲+b$	۶	۴	$a+۲$

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

۴۲۷- رابطهٔ $\{(5,6),(2,m^2-4),(m+2,n-1),(2,5)\}$ تابع است. مجموع اعضای برد تابع کدام است؟ $(m,n>0)$ تألیفی

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۲۲

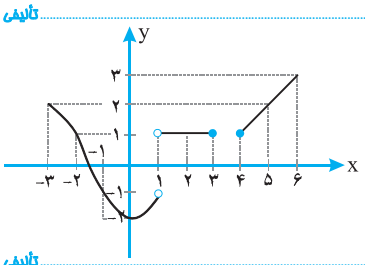
۴۲۸- اگر $f=\{(2,m),(1,2m-1),(6,3+m)\}$ ، حاصل‌ضرب اعضای برد تابع $2f(2)+f(1)-f(6)=5$ برابر کدام است؟ تألیفی

۱) ۱۴ ۲) ۹۰ ۳) ۳۰ ۴) ۱۵

۴۲۹- اگر دامنهٔ تابع $y=\frac{2}{3}x-1$ برابر $D=\{-1,1,\frac{3}{2},4,6\}$ باشد، مجموع مقادیر موجود در مجموعهٔ برد آن کدام است؟ تألیفی

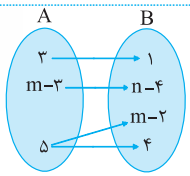
۱) ۸ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) ۳

۴۳۰- با توجه به نمودار تابع در شکل مقابل، «حاصل‌جمع اعضای طبیعی دامنه و برد تابع» کدام است؟ تألیفی



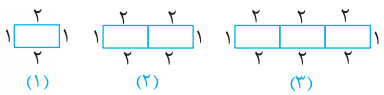
۱) ۲۵
۲) ۲۴
۳) ۲۶
۴) ۲۷

۴۳۱- نمودار پیکانی روبه‌رو مربوط به یک تابع است. مجموع اعضای برد و دامنهٔ این تابع کدام است؟ تألیفی



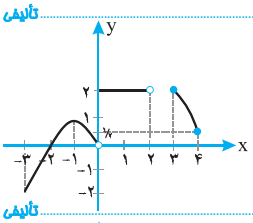
۱) ۱۵
۲) ۱۷
۳) ۱۳
۴) ۱۰

۴۳۲- شکل‌های زیر را در نظر بگیرید، برد تابعی که «ورودی آن تعداد مستطیل‌ها» و «محیط آن شکل به عنوان خروجی» باشد کدام است؟ تألیفی



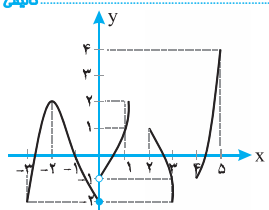
۱) $R=\{2k+2\in N\}$ ۲) $R=\{2(2k+1)\,|\,k\in N\}$
۳) $R=\{(2k)\,|\,k\in N\}$ ۴) $R=\{(2k+4)\,|\,k\in N\}$

۴۳۳- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است، دامنهٔ f کدام است؟ تألیفی



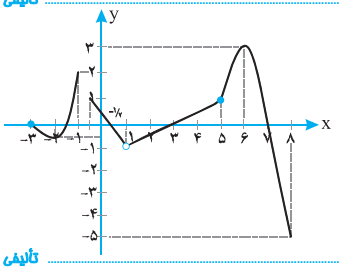
۱) $[-3,2)\cup(3,4)$
۲) $[-3,2)\cup[3,4]$
۳) $[-3,0)\cup(0,2)\cup(3,4)$
۴) $[-3,0)\cup(0,2)\cup[3,4]$

۴۳۴- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. برد این تابع کدام است؟ تألیفی



۱) $[-2,-1)\cup(-1,4]$
۲) $[-3,5]$
۳) $[-3,1]\cup[2,3]\cup[4,5]$
۴) $[-2,4]$

۴۳۵- نمودار تابع f به شکل مقابل است. اشتراک دامنه و برد تابع شامل چند عدد صحیح است؟ تألیفی



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

۴۳۶- دامنهٔ تابع $y=\frac{x^2}{x^2+9}$ کدام است؟ تألیفی

۱) $R-\{-3,3\}$ ۲) $R-\{3\}$ ۳) R ۴) $R-\{-3,0,3\}$

۴۳۷- دامنهٔ تابع $\frac{x^2-4}{(x-2)(x^3+8)}$ چند عضو از مجموعهٔ اعداد حقیقی را ندارد؟ تألیفی

۱) سه ۲) یک ۳) صفر ۴) دو

۴۳۸- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1-9x^2}$ کدام است؟ تألیفی

۱) $(-3,0]$ ۲) $[-3,3]$ ۳) $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ۴) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$

۴۳۹- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^3+27}$ کدام است؟ تألیفی

۱) $[-3,+\infty)$ ۲) $[-2,2]$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $[-3,2]$

۴۴۰- دامنهٔ تابع $y=\frac{x+3}{3x^2+2x+a}$ به صورت $R-\{b\}$ می‌باشد. حاصل $a+b$ کدام است؟ تألیفی

۱) ۳ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴۴۱- تابع $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+mx-3n}$ را در نظر بگیرید. اگر دامنهٔ تابع برابر $R-\{3\}$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟ تألیفی

۱) ۶ ۲) -۹ ۳) -۶ ۴) -۳

۴۴۲- به ازای چه مقادیری از x عبارت $\sqrt{\frac{-2x+1}{x}}$ تعریف شده است؟ تألیفی

۱) $(-\infty,0)$ ۲) $(0,\frac{1}{2})$ ۳) $[0,\frac{1}{2}]$ ۴) $(0,\frac{1}{2}]$

۴۴۳- دامنهٔ تعریف تابع $y=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ کدام است؟ تألیفی

۱) $(-2,0)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $[0,2]$ ۴) $(-2,2)$

۴۴۴- برد تابع $y=\frac{x-2}{x+5}$ کدام است؟ تألیفی

۱) $R-\{1\}$ ۲) $R-\{-1\}$ ۳) $R-\{1,-1\}$ ۴) $R-\{-5\}$

۴۴۵- اگر دامنهٔ تابع $y=\frac{5}{2}x-3$ را $[-4,2)$ در نظر بگیریم، برد تابع کدام است؟ (y تابعی از x است.) تألیفی

۱) $[-13,2]$ ۲) $(-13,5]$ ۳) $[2,13)$ ۴) $(-13,2]$

۴۴۶- برد تابع $x^5-4x^4+3x^2+2x+1$ کدام است؟ تألیفی

۱) $[-2,2]$ ۲) $(-\infty,2]$ ۳) $[2,\infty)$ ۴) R

پاسخ تشریحی تست های کنکور و تألیفی فصل سوم درس اول

۳۷۴- برای اینکه مجموعه یک عضو داشته باشد، باید هر دو زوج مرتب با هم برابر باشند (هر دو یکی باشند) بنابراین باید مؤلفه‌های اول با هم و مؤلفه‌های دوم نیز با هم برابر باشند.

$$(a+b\ ,\ b+2)=(2a-b\ ,\ 2b-6)\Rightarrow\begin{cases}a+b=2a-b\Rightarrow 2b=a\\ b+2=2b-6\Rightarrow 8=b\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=2(8)=16\\ b=8\end{matrix}$$

خواستهٔ سوال $a+b$ است. بنابراین $a+b=16+8=24$.

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۳۷۵- $R=\{(x,y)\,|\,x\in A,y\in B,2x\neq y\}$

تذکر: به نحوهٔ نمایش بالا «نمایش مجموعه با استفاده از نمادهای ریاضی» گفته می‌شود. می‌خواهیم زوج مرتب (x,y) طوری انتخاب شود که x متعلق به A و y متعلق به B و همچنین $2x$ برابر با y نباشد. علامت $(|)$ خوانده می‌شود «به طوری‌که». علامت $(\in)$ خوانده می‌شود «متعلق به».

پس ما دنبال زوج مرتب‌هایی هستیم که $x\in\{1,2,3\}$ و $y\in\{2,5,6\}$ و $2x\neq y$ یعنی دو برابر مؤلفهٔ اول با مؤلفهٔ دوم مساوی نباشد.

مطابق سؤال‌های قبل حالت‌بندی می‌کنیم: $x\in\{1,2,3\}$ $\quad y\in\{2,5,6\}$

$$x=1\Rightarrow 2x=2\Rightarrow y\neq 2\Rightarrow y=\begin{cases}5\\6\end{cases}\qquad x=2\Rightarrow 2x=4\Rightarrow y\neq 4\Rightarrow y=\begin{cases}2\\5\\6\end{cases}\qquad x=3\Rightarrow 2x=6\Rightarrow y\neq 6\Rightarrow y=\begin{cases}2\\5\end{cases}$$

پس رابطهٔ R یعنی، $R=\{(1,5),(1,6),(2,2),(2,5),(2,6),(3,2),(3,5)\}$ است.

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۳۷۶- $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in N,x+y\leq 5\}$

نمایش مجموعه‌ای را به زبان خودمان ترجمه می‌کنیم. برای رابطهٔ R دنبال زوج مرتب‌هایی هستیم به‌طوری که مؤلفه اول (x) و مؤلفه دوم (y) جزو اعداد طبیعی ($\{1,2,3,4,...\}$ = مجموعهٔ اعداد طبیعی) باشند و مجموع مؤلفه اول (x) و مؤلفه دوم (y) کوچکتر یا مساوی پنج باشد.

$x\in\{1,2,3,4,...\}$ $\quad y\in\{1,2,3,4,...\}$ $\quad x+y\leq 5$

حالت‌بندی می‌کنیم:

$$x=1\xrightarrow{x+y\leq 5}y=\begin{cases}1\\2\\3\\4\end{cases}\qquad x=2\xrightarrow{x+y\leq 5}y=\begin{cases}1\\2\\3\end{cases}\qquad x=3\xrightarrow{x+y\leq 5}y=\begin{cases}1\\2\end{cases}\qquad x=4\xrightarrow{x+y\leq 5}y=1$$

پس رابطهٔ R، ۱۰ زوج مرتب دارد، $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۳۷۷- $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in N,2x+y\leq 7\}$

نمایش مجموعه‌ای را به زبان خودمان ترجمه می‌کنیم. برای رابطهٔ R دنبال زوج مرتب‌هایی هستیم به‌طوری که مؤلفه اول (x) و مؤلفه دوم (y) جزو اعداد طبیعی ($\{1,2,3,4,...\}$ = مجموعهٔ اعداد طبیعی) باشند و مجموع دو برابر مؤلفه اول (x) و مؤلفه دوم (y) کوچکتر یا مساوی هفت باشد.

$x\in\{1,2,3,4,...\}$ $\quad y\in\{1,2,3,4,...\}$ $\quad 2x+y\leq 7$

حالت‌بندی می‌کنیم:

$$x=1\Rightarrow 2x=2\xrightarrow{2x+y\leq 7}y=\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\end{cases}\qquad x=2\Rightarrow 2x=4\xrightarrow{2x+y\leq 7}y=\begin{cases}1\\2\\3\end{cases}\qquad x=3\Rightarrow 2x=6\xrightarrow{2x+y\leq 7}y=1$$

پس رابطهٔ R، ۹ زوج مرتب دارد. $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۳۷۸- $R=\{(x,y)\,|\,x\in B,y\in A,xy\neq 6\}$

نمایش مجموعه را به زبان خودمان ترجمه می‌کنیم: برای رابطهٔ R دنبال زوج مرتب‌های (x,y) می‌گردیم، به‌طوری که مؤلفهٔ اول (x) متعلق به مجموعهٔ $B=\{1,3,5\}$ و مؤلفه دوم (y) متعلق به مجموعهٔ $A=\{2,4,6\}$ باشد، به طوری که حاصل‌ضرب مؤلفهٔ اول در مؤلفهٔ دوم مخالف شش باشد.

$x\in\{1,3,5\}$ $\quad y\in\{2,4,6\}$ $\quad xy\neq 6$

حالت‌بندی می‌کنیم:

$$x=1\xrightarrow{xy\neq 6}y=\begin{cases}2\\4\end{cases}\qquad x=3\xrightarrow{xy\neq 6}y=\begin{cases}4\\6\end{cases}\qquad x=5\xrightarrow{xy\neq 6}y=\begin{cases}2\\4\\6\end{cases}$$

رابطهٔ R، ۷ عضو دارد. $R=\{(1,2),(1,4),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۳۷۹- زوج‌های مرتب را به فرم (a,b) انتخاب می‌کنیم. $a,b\in A=\{1,2,3,4\}$

باید حاصل‌ضرب مؤلفه‌های هر زوج مرتب عددی زوج و حاصل‌جمع آنها عددی فرد باشد، یعنی:

$$\begin{cases}ab=\text{زوج}\\ a+b=\text{فرد}\end{cases}$$

اگر a برابر ۴ باشد، b باید عددی فرد باشد ($a+b$ باید فرد باشد) پس b فقط می‌تواند ۱ یا ۳ باشد. $\quad a=4\Rightarrow b=\begin{cases}1\\3\end{cases}$

اگر a برابر ۳ باشد، b باید عددی زوج باشد ($a+b$ باید فرد باشد) پس b فقط می‌تواند ۲ یا ۴ باشد. $\quad a=3\Rightarrow b\begin{cases}2\\4\end{cases}$

اگر a برابر ۲ باشد، b باید عددی فرد باشد ($a+b$ باید فرد باشد) پس b فقط می‌تواند ۱ یا ۳ باشد. $\quad a=2\Rightarrow b\begin{cases}1\\3\end{cases}$

اگر a برابر ۱ باشد، b باید عددی فرد باشد ($a+b$ باید فرد باشد) پس b فقط می‌تواند ۲ یا ۴ باشد. $\quad a=1\Rightarrow a\begin{cases}2\\4\end{cases}$

$R=\{(4,1),(4,3),(3,2),(3,4),(2,1),(2,3),(1,2),(1,4)\}$

پس این مجموعه، ۸ عضو دارد.

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۳۸۰- می‌دانیم که رابطه، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است و رابطه‌ای تابع است که در آن، هیچ دو زوج متمایزی دارای مختص‌های اوّل (xهای) مساوی نباشد و اگر دو زوج دارای مختص‌های اوّل مساوی باشد، آنگاه مختص‌های دوم آنها هم مساوی باشد. پس: چون دو زوج مرتب $(۳,۴)$ و $(۳,m+۲)$ دارای مختص‌های اول یکسان هستند، مختص‌های دوم آنها باید مساوی باشند تا یک تابع داشته باشیم، یعنی: $m+۲=۴ \Rightarrow m=۴-۲=۲$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۳۸۱- در هر یک از گزینه‌ها $m=-۱$ را جای‌گذاری کرده و تابع بودن آن را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ یک: $\{(-۱,-۲),(-۲,-۱),(-۱,-۳)\} \Rightarrow$ xهای برابر وجود دارد، ولی yهای آنها مساوی نیست. پس تابع نیست.

گزینهٔ دو: $\{(-۱,-۲),(-۳,-۱),(-۱,-۳)\} \Rightarrow$ همانند تحلیل فوق، تابع نیست.

گزینهٔ سه: $\{(-۱,-۲),(-۲,-۱),(-۲,-۲)\} \Rightarrow$ همانند تحلیل فوق، تابع نیست.

گزینهٔ چهار: $\{(-۱,-۲),(-۲,-۱),(۳,-۱)\} \Rightarrow$ xهای برابر وجود ندارد، پس تابع است. (y برابر داشتن ایرادی ندارد.)

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۳۸۲- بنابر فرض سؤال رابطهٔ f یک تابع است، پس طبق تعریف تابع «اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب دلخواه برابر باشند، برای آن‌که مجموعه یک تابع باشد، باید حتماً مؤلفه‌های دوم آنها نیز با هم برابر باشند.» بنابراین چون دو زوج مرتب $(۲,۵)$ و $(۲,k^۲-۴)$ دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند بنابراین مؤلفه‌های دومشان نیز باید برابر باشند.

$k^۲-۴=۵ \Rightarrow k^۲=۹ \Rightarrow k=\pm ۳$

حالت اول: $k=۳$

$f=\{(۲,۵),(۲,۵),(۵,۱),(۵,۲)\}$

رابطهٔ f تابع نیست زیرا دو زوج مرتب $(۵,۱)$ و $(۵,۲)$ با وجود آنکه مؤلفه‌های اول برابرند اما مؤلفه‌های دوم برابر نیستند.

حالت دوم: $k=-۳$

$f=\{(۲,۵),(۲,۵),(-۱,۱),(۵,۲)\}$

در حالت دوم رابطهٔ f تابع است زیرا زوج مرتب‌هایی که مؤلفه اول برابر دارند مؤلفه‌های دومشان هم برابر است.

تذکر: وجود زوج مرتب‌هایی مانند $(۲,۵)$ و $(۵,۲)$ هیچ منافاتی با تعریف تابع ندارد. همچنین وجود زوج مرتب‌هایی مانند $(۳,۱)$ و $(۶,۱)$ نیز منافاتی با تعریف تابع ندارد زیرا مؤلفه‌های اول برابر ندارند. بلکه مؤلفه دومشان برابر است و هیچ مشکلی به وجود نمی‌آورد. زمانی مشکل ایجاد می‌شود و رابطهٔ ما تابع نیست که به ازای مؤلفه‌های اول برابر، مؤلفه دومشان برابر نباشد.

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۳۸۳- زمانی رابطه یک تابع است که اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب دلخواه برابر باشند، مؤلفه‌های دوم آنها نیز با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{matrix}(a+۲,a-b)\\(a+۲,۳b)\end{matrix}\right\} \Rightarrow a-b=۳b \Rightarrow a=۴b \left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}a=۴(۳)=۱۲\\b=۳\end{matrix}$$
$$\left.\begin{matrix}(a,۶)\\(a,۲b)\end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲b=۶ \Rightarrow b=۳$$

خواسته سؤال $a-b$ است بنابراین: $a-b=۱۲-۳=۹$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۳۸۴- اگر در یک مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های اول در دو زوج مرتب دلخواه برابر باشند، برای آن‌که مجموعه یک تابع باشد، باید حتماً مؤلفه‌های دوم آنها نیز با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{matrix}(۳,۷)\\(۳,a^۲+۳)\end{matrix}\right\} \Rightarrow a^۲+۳=۷ \Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=\pm ۲$$

حالت اول: $a=۲$

$\{(۳,۷),(۳,۴),(۳,۷),(-۱,۲b)\}$

رابطهٔ فوق تابع نیست زیرا دو زوج مرتب $(۳,۴)$ و $(۳,۷)$ به ازای مؤلفه‌های اول برابر مؤلفه‌های دومشان برابر نیست.

حالت دوم: $a=-۲$

$\{(۳,۷),(-۱,۴),(۳,۷),(-۱,۲b)\}$

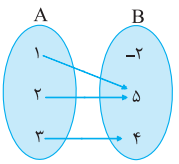
چون دو زوج مرتب $(-۱,۲b)$ و $(-۱,۴)$ مؤلفه‌های اول برابر دارند بنابراین باید مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند.

$۲b=۴ \Rightarrow b=۲$

بنابراین خواسته سؤال برابر است با: $a-b=-۲-(۲)=-۴$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۳۸۵- یک رابطه بین مجموعه‌های A و B که با نمودار پیکانی نمایش داده شده است،



تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

در گزینهٔ «۲» از عضو ۳ پیکانی خارج نشده بنابراین تابع نیست.

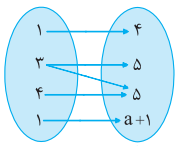
تذکر: نمودار پیکانی گزینهٔ «۴» تابع است.

اگر به مؤلفه‌ای از مجموعهٔ B، دو پیکان وارد شود تابع بودن را نقض نمی‌کند.

اگر به مؤلفه‌ای از مجموعهٔ B پیکانی وارد نشود نیز تابع بودن را نقض نمی‌کند.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۳۸۶- چون از ۳ دو پیکان خارج شده، بنابراین باید $b-۵=۷$ باشد. پس $b=۲$ بنابراین نمودار به شکل مقابل خواهد بود:

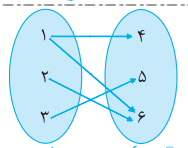


در رابطهٔ مقابل از ۱، دو پیکان خارج شده بنابراین $a+۱=۴$، پس $a=۳$ است.

خواسته سؤال ab است، بنابراین: $ab=۳\times ۲=۶$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۳۸۷- نمایش مجموعه‌ای رابطه به صورت زوج مرتب: $\{(۳,۵),(۲,۶),(۱,۶),(۱,۴)\}$ همان‌طور که می‌دانیم رابطه زمانی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ اول دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.

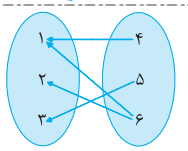


که در این نمودار پیکانی، چون از عدد یک، ۲ پیکان به دو عضو مختلف وارد شده بنابراین تابع نیست.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۳۸۸- تذکر مهم: لطفاً اشتباه نکنید!

در نمودارهای پیکانی همواره جهت پیکان‌ها از مجموعهٔ اول به مجموعهٔ دوم است و هر عضو از مجموعهٔ اول، به عضو نظیر از مجموعهٔ دوم وصل می‌شود. بنابراین رابطهٔ R به صورت روبه رو است: (به جهت پیکان‌ها توجه کنید.)

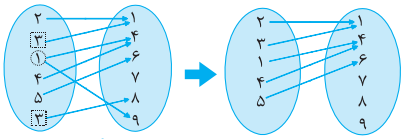


نمایش مجموعه‌ای رابطه به صورت زوج مرتب: $\{(۶,۲),(۶,۱),(۵,۳),(۴,۱)\}$

رابطه تابع نیست زیرا از عضو ۶ دو پیکان به دو عضو مختلف وصل شده است.

گزینهٔ ۴ صحیح است.

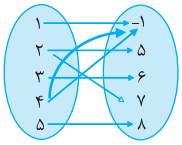
۳۸۹- نمودار پیکانی تنها در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شود.
اگر به نمودار پیکانی توجه کنید از عضو ۳ و ۱ از هر کدام ۲ پیکان خارج شده است.



اگر دقیقاً ۲ پیکان را حذف کنیم به دیاگرام زیر می‌رسیم.

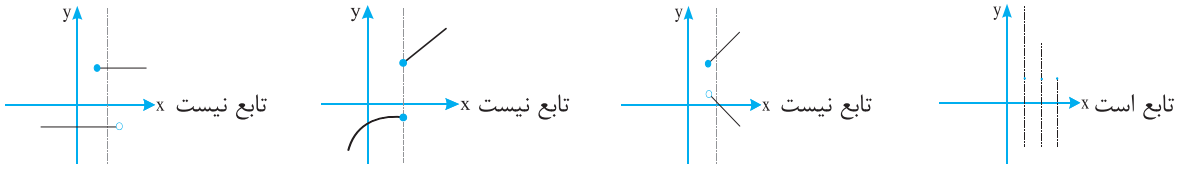
گزینهٔ ۱ صحیح است.

۳۹۰- تذکر: اگر از یک عضو مجموعهٔ A (مجموعهٔ اول) دو یا چند پیکان به یک عضو از مجموعهٔ دوم وارد شود، باز هم نمودار پیکانی حاصل یک تابع را نمایش می‌دهد. چون آن دو عضو در واقع بیانگر یک زوج مرتب هستند.
مطابق توضیحات بالا اینکه از عضو ۴ به عضو ۱- دو پیکان خارج شده، هیچ اشکالی به وجود نمی‌آورد. و فقط یکی از پیکان‌های خارج شده از ۲ باید حذف شود. بنابراین با حذف یک پیکان رابطه تبدیل به تابع می‌شود.



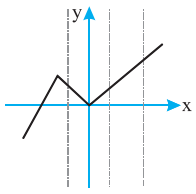
گزینهٔ ۳ صحیح است.

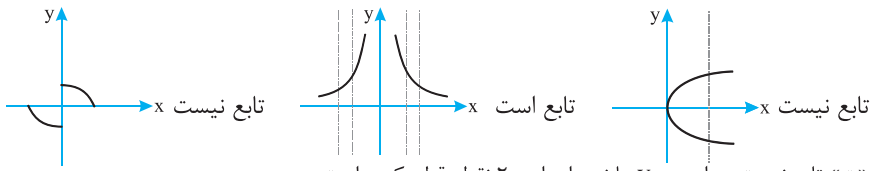
۳۹۱- از نظر نموداری رابطه‌ای تابع خواهد بود که اگر هر خط موازی با محور y ها رسم شود، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند.



گزینهٔ ۱ صحیح است.

۳۹۲- «الف» تابع است. زیرا اگر هر خط موازی با محور y ها رسم شود نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نخواهد کرد.

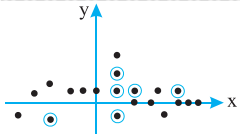




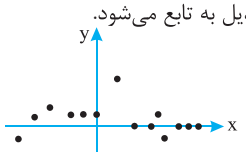
«ت» تابع نیست زیرا محور y ها نمودار را در ۲ نقطه قطع کرده است.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۳۹۳- با حذف شش نقطه نمودار رابطه تبدیل به تابع می‌شود.



نمودار رابطه پس از حذف شش نقطه:



اگر نقاط دیگری را هم حذف کنیم باز نمودار تبدیل به تابع می‌شود، اما حداقل حذف شش نقطه لازم است.

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۳۹۴- یک رابطهٔ جدولی زمانی تابع است، که مقادیر بالای جدول (مؤلفه‌های اول) با هم برابر نباشند و یا اگر برابر باشند، مقادیر پایینی آنها (مؤلفه‌های دوم آنها) نیز با هم برابر باشند. ما همیشه یک شرط ثابت داریم برای تابع بودن، در یک رابطه مؤلفه‌های اول (x ها) یکسان نباشند و اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند، آنگاه مؤلفه‌های دوم (y ها) آنها هم باید یکسان باشند.
در نمایش‌های مختلف رابطه چه به صورت زوج مرتب و چه به صورت نموداری یا جدولی این شرط برقرار است. پس ما یک شرط واحد داریم در نمایش‌های مختلف ممکن است بیان‌مان را تغییر دهیم ولی مفهوم یکی است.

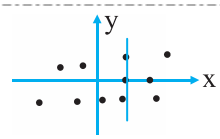
بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: ۲ زوج مرتب $(۲,۵)$, $(\sqrt{۴},\sqrt{۲۵})$ دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند و مؤلفه‌های دوم آنها نیز برابر هستند، بنابراین رابطه تابع است.
گزینهٔ «۲»: دو زوج مرتب $(-۱,۳)$ و $(\sqrt{۹},-۵)$ دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند ولی مؤلفه‌های دوم‌شان برابر نیست. بنابراین رابطه، تابع نیست.
گزینهٔ «۳»: هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفهٔ اول برابر نیستند، بنابراین، رابطه تابع است.
گزینهٔ «۴»: در این رابطه زوج مرتب $(۲,۱)$ دو بار تکرار شده است که منافاتی با شرط تابع بودن ندارد.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

توضیح بیشتر: زوج مرتب‌هایی مانند $(۵,۱)$ و $(۲,۵)$ در گزینهٔ ۲ یا $(۳,۴)$ و $(۲,۳)$ در گزینهٔ ۳ یا $(۲,۱)$ و $(۱,۲)$ در گزینهٔ ۴ هیچ مشکلی در شرط تابع بودن به وجود نمی‌آورند زیرا همان طور که گفته شد اگر در رابطه‌ای مؤلفه‌های اول برابر باشند و مؤلفه‌های دوم برابر نباشند رابطه تابع نیست.

۳۹۵- بررسی گزینه‌ها:
گزینهٔ «۱»: رابطه تابع نیست زیرا خط رسم شده نمودار رابطه را در دو نقطه قطع کرده است.
گزینهٔ «۲»: رابطه تابع است زیرا هیچ‌کدام از مؤلفه‌های اول با هم برابر نیستند.
گزینهٔ «۳»: رابطه تابع است و اگر دو مربع، محیط برابر داشته باشند اضلاع برابر هم دارند.
گزینهٔ «۴»: رابطه را تشکیل می‌دهیم: $\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$
رابطه تابع است زیرا هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفهٔ اول برابر نیستند.



گزینهٔ ۱ صحیح است.

پاسخ تشریحی تست های کنکور و تألیفی فصل سوم درس دوم

۳۹۶- وقتی $x=-1$ باشد با توجه به شکل، y چه عددی است؟ پاسخ: $y=2$. چگونه آن را به دست آوردیم؟ در $x=-1$ خطی موازی با محور yها رسم کردیم تا نمودار را قطع کند و از آن نقطه از نمودار، عمودی به محور yها رسم کردیم، هر عددی را که نشان داد جواب سؤال است. گزینهٔ ۱ صحیح است.

۳۹۷- $f(2)$ یعنی این که وقتی x، دو است y چه عددی خواهد بود؟ و همچنین مفهوم $f(4)$ این است که وقتی x عدد چهار است y چه عددی خواهد بود؟
با توجه به این که وقتی x دو است، y آن در زوج مرتب (۳ و ۲)، سه است پس: $f(2)=3$
با توجه به این‌که وقتی x، چهار است، y آن در زوج مرتب (۲ و ۴)، دو است پس: $f(4)=2$ ، $6-2=4 \xrightarrow[f(4)=2]{f(2)=3} 2f(2)-f(4)$ گزینهٔ ۳ صحیح است.

۳۹۸-
$f\{(2,m+n),(3,2m-b),(5,7),(2,b-2),(6,b+m+n)\}$
چون رابطهٔ f، تابع است و دو زوج مرتب $(2,m+n)$ و $(2,b-2)$ مؤلفه‌های اول برابر دارند بنابران مؤلفه‌های دوم آنها باید برابر باشد. $m+n=b-2$ (۱)
همچنین $(2,6)$ عضوی از f است بنابراین: $(2,6)\in f \Rightarrow m+n=6$ (۳)
حال مقدار $m+n$ را در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم، بنابراین: $6=b-2 \Rightarrow b=8$ (۴)
خواستهٔ سوال $f(6)$ یعنی $b+m+n$ است، بنابراین: $b+m+n=8+6=14$
گزینهٔ ۳ صحیح است.

۳۹۹- برای به دست آوردن $f(\frac{3}{2})$ باید در تابع $f(x)$ به جای x، $\frac{3}{2}$ قرار دهیم. $f(\frac{3}{2})=4(\frac{3}{2})-\sqrt{1+2(\frac{3}{2})}=6-\sqrt{1+3}=6-\sqrt{4}=6-2=4$
گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۰۰- مفهوم $f(-2)$ یعنی این‌که در ضابطهٔ تابع هر کجا x دیدیم به جایش -2 بگذاریم و به همین ترتیب در مورد $f(2)$ نیز چنان عمل می‌کنیم، هر کجا x دیدیم به جایش ۲ می‌گذاریم. $f(2)-f(-2)=\frac{8-1}{4+2}-\frac{-8-1}{4+2}=\frac{7}{6}-\frac{-9}{6}=\frac{7}{6}+\frac{9}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$
$f(2)=\frac{(2)^3-1}{(2)^2+2}$ ، $f(-2)=\frac{(-2)^3-1}{(-2)^2+2}$
گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۰۱- از روی ضابطهٔ تابع f مقادیر $f(3)$ و $f(m)$ و $f(-2)$ را جای‌گذاری می‌کنیم. $f(3)-2f(m)=3f(-2)$
$\xrightarrow{f(3)-2f(m)=3f(-2)}(2\times3+5)-2(2\times m+5)=3(2\times(-2)+5)\Rightarrow 11-2(2m+5)=3(1)\Rightarrow 11-4m-10=3\Rightarrow 11-3-10=4m\Rightarrow$
$4m=-2\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$
گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۰۲- اعداد $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ را در ضابطهٔ تابع تک تک قرار می‌دهیم و سپس حاصل جمع آن دو را می‌نویسیم.
$f(x)=x+\frac{2}{x}\Rightarrow f(1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}+\frac{2}{1+\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}+(\frac{2}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}})=1+\sqrt{2}+\frac{2-2\sqrt{2}}{1-2}=1+\sqrt{2}+(-2+2\sqrt{2})=-1+3\sqrt{2}$
$f(x)=x+\frac{2}{x}\Rightarrow f(1-\sqrt{2})=1-\sqrt{2}+\frac{2}{1-\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}+(\frac{2}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})=1-\sqrt{2}+\frac{2+2\sqrt{2}}{1-2}=1-\sqrt{2}+(-2-2\sqrt{2})=-1-3\sqrt{2}$
$\Rightarrow f(1+\sqrt{2})+f(1-\sqrt{2})=-1+3\sqrt{2}-1-3\sqrt{2}=-2$
گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۰۳- باید نقاط داده شده در صورت سؤال را در ضابطهٔ تابع قرار دهیم و سپس در عبارت داده شده جای‌گذاری کنیم. $f(x)=x^2-2x+3$
$\left.\begin{array}{l} f(1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})+3=(1+2\sqrt{2}+2)-2-2\sqrt{2}+3=1+3=4 \\ f(2)=2^2-4+3=3 \end{array}\right\}\Rightarrow f(1+\sqrt{2})-f(2)=4-3=1$
گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۰۴- در تابع هر کجا x دیدیم، به جایش $\sqrt{3}-2$ می‌گذاریم. $f(x)=\sqrt{-2x^2+8x+7}\Rightarrow f(\sqrt{3}-2)=\sqrt{-2(\sqrt{3}-2)^2+8(\sqrt{3}-2)+7}$
$=\sqrt{-2(4-4\sqrt{3}+3)+16-8\sqrt{3}+7}=\sqrt{-2(7-4\sqrt{3})+23-8\sqrt{3}}=\sqrt{-14+8\sqrt{3}+23-8\sqrt{3}}=\sqrt{-14+23}=\sqrt{9}=3$
گزینهٔ ۳ صحیح است.

۴۰۵-
$\xrightarrow{f(x)=\sqrt{-x^2+4x+12}} f(2+\sqrt{7})=\sqrt{-(2+\sqrt{7})^2+4(2+\sqrt{7})+12}=\sqrt{-(4+4\sqrt{7}+7)+8+4\sqrt{7}+12}$
$\Rightarrow f(2+\sqrt{7})=\sqrt{-4-7+8+12}=\sqrt{9}=3$
$f(2)=\sqrt{-(2)^2+4(2)+12}=\sqrt{-4+8+12}=\sqrt{16}=4 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} f(2+\sqrt{7})-f(2)=3-4=-1$
گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۰۶- مفهوم صورت سؤال این است که مقدار داده شده را در ضابطهٔ تابع جای‌گذاری کنیم.
$f(x)=\frac{2x^2+2}{x^2-3}\Rightarrow f(2-\sqrt{3})=\frac{2(2-\sqrt{3})^2+2}{(2-\sqrt{3})^2-3}\xrightarrow[\text{دو جمله‌ای}]{\text{اتحاد مربع}}\frac{2(4-4\sqrt{3}+3)+2}{(4-4\sqrt{3}+3)-3}$

$$\frac{۲(۷-۴\sqrt{۳})+۲}{۷-۴\sqrt{۳}-۳}=\frac{۱۴-۸\sqrt{۳}+۲}{۴-۴\sqrt{۳}}=\frac{۱۶-۸\sqrt{۳}}{۴-۴\sqrt{۳}}\xrightarrow{\text{فاکتور از ۴}}\frac{۴(۴-۲\sqrt{۳})}{۴(۱-\sqrt{۳})}=\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}}\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{۴+۴\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}-۶}{۱-۳}=\frac{-۲+۲\sqrt{۳}}{-۲}=\frac{-۲}{-۲}+\frac{۲\sqrt{۳}}{-۲}=۱-\sqrt{۳}$$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۰۷- هر کجا x دیدیم به جایش $۱-\sqrt{۲}$ می‌گذاریم.

$$f(x)=\frac{-۲x^۲+۵x}{x-۲}\Rightarrow f(۱-\sqrt{۲})=\frac{-۲(۱-\sqrt{۲})^۲+۵(۱-\sqrt{۲})}{(۱-\sqrt{۲})-۲}=\frac{-۲(۱+۲-۲\sqrt{۲})+۵-۵\sqrt{۲}}{-\sqrt{۲}-۱}$$

$$=\frac{-۶+۴\sqrt{۲}+۵-۵\sqrt{۲}}{-\sqrt{۲}-۱}=\frac{-۱-\sqrt{۲}}{-\sqrt{۲}-۱}=\frac{-\sqrt{۲}-۱}{-\sqrt{۲}-۱}=۱$$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۰۸-

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۷}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(۴)=\sqrt{۴^۲-۷}=\sqrt{۱۶-۷}=\sqrt{۹}=۳ \\ f(۲\sqrt{۲})=\sqrt{(۲\sqrt{۲})^۲-۷}=\sqrt{۸-۷}=\sqrt{۱}=۱ \end{array}\right\}\Rightarrow f(۴)-f(۲\sqrt{۲})=۳-۱=۲$$

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۴۰۹- این‌که در صورت سؤال گفته شده در چه نقطه‌ای این دو تابع با هم برابر می‌شوند به این معنی است که دو تابع را مساوی هم قرار می‌دهیم. اما قبل از این کار باید حاصل $f(x-۱)$ را به دست بیاوریم. (یعنی مقدار $x-۱$ را در تابع $f(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم.)

$$f(x)=x^۲-x\Rightarrow f(x-۱)=(x-۱)^۲-(x-۱)=x^۲-۲x+۱-x+۱\Rightarrow f(x-۱)=x^۲-۳x+۲$$

حال مقدار تابع به دست آمده را با تابع $f(x)$ برابر قرار می‌دهیم.

$$\underbrace{x^۲-۳x+۲}_{f(x-۱)}=\underbrace{x^۲-x}_{f(x)}\Rightarrow x^۲-۳x+۲-x^۲+x=۰\Rightarrow -۲x+۲=۰\Rightarrow -۲x=-۲\Rightarrow x=۱$$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۱۰- یک بار عدد ۲ و یک بار عبارت $x+۲$ را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم و سپس از هم کم می‌کنیم.

$$f(x)=-x^۲+۳x\xrightarrow{f(x+۲)}f(x+۲)=-(x+۲)^۲+۳(x+۲)=-(x^۲+۴x+۴)+۳x+۶=-x^۲-۴x-۴+۳x+۶=-x^۲-x+۲$$

$$f(x)=-x^۲+۳x\xrightarrow{f(۲)}f(۲)=-(۲)^۲+۳(۲)=-۴+۶=۲$$

$$f(x+۲)-f(۲)=-x^۲-x+۲-۲=-x^۲-x$$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۱۱- یک بار در ضابطهٔ تابع صفر را جای‌گذاری می‌کنیم و یک بار دیگر $۲x+۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم و سپس آن‌چه به دست آمده است را، در عبارت داده شدهٔ صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x^۲+۳}{x^۲-۱}\xrightarrow{f(۲x+۱)}f(۲x+۱)=\frac{(۲x+۱)^۲+۳}{(۲x+۱)^۲-۱}=\frac{۴x^۲+۴x+۱+۳}{۴x^۲+۴x+۱-۱}=\frac{۴x^۲+۴x+۴}{۴x^۲+۴x}=\frac{۴(x^۲+x+۱)}{۴(x^۲+x)}=\frac{x^۲+x+۱}{x^۲+x}\quad (۱)$$

$$f(۰)=\frac{(۰)^۲+۳}{(۰)^۲-۱}=\frac{۳}{-۱}=-۳\Rightarrow\frac{۱}{۳}f(۰)=\frac{۱}{۳}(-۳)=-۱\quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}f(۲x+۱)+\frac{۱}{۳}f(۰)=\frac{x^۲+x+۱}{x^۲+x}-۱\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}}\frac{x^۲+x+۱-x^۲-x}{x^۲+x}=\frac{۱}{x^۲+x}$$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۱۲- ابتدا $x+۲$ را در ضابطهٔ تابع جای‌گذاری می‌کنیم و مقدار خواسته شده را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{-۱}{۲}x^۲+۲x\Rightarrow f(x+۲)=-\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲+۲(x+۲)=$$

$$-\frac{۱}{۲}(x^۲+۴x+۴)+۲x+۴=-\frac{۱}{۲}x^۲-۲x-۲+۲x+۴=-\frac{۱}{۲}x^۲+۲\Rightarrow f(x+۲)-f(x)=(-\frac{۱}{۲}x^۲+۲)-(-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x)=۲-۲x=-۲x+۲$$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۱۳- باز هم باید در ضابطهٔ تابع آن‌چه در صورت سؤال خواسته است را جای‌گذاری کنیم.

$$f(x)=x^۲-۳x+۲$$

$$f(x+۲)=(x+۲)^۲-۳(x+۲)+۲=x^۲+۴x+۴-۳x-۶+۲=x^۲+x$$

$$f(x-۲)=(x-۲)^۲-۳(x-۲)+۲=x^۲-۴x+۴-۳x+۶+۲=x^۲-۷x+۱۲$$

$$\Rightarrow f(x+۲)-f(x-۲)=x^۲+x-(x^۲-۷x+۱۲)=x^۲+x-x^۲+۷x-۱۲=۸x-۱۲=۴(۲x-۳)$$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۱۴- اگر ورودی تابع x باشد خروجی آن $\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ است. بنابراین اگر ورودی $\square$ باشد خروجی $\frac{\square}{\sqrt{۱+\square^۲}}$ خواهد بود. اگر ورودی $\frac{۱}{x}$ باشد خروجی برابر است با:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\longrightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}}=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\frac{x\times 1}{x\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

خواستهٔ سوال برابر است با: $f(x).f(\frac{1}{x})=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{1+x^2}$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۱۵- زوج‌های مرتب مجموعه را در هر کدام از گزینه‌ها امتحان می‌کنیم. ابتدا در گزینهٔ یک امتحان می‌کنیم: $(-1,0)\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=(-1)^2-1=1-1=0$

$(1,0)\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1^2-1=0$ $\quad$ $(0,-1)\Rightarrow x=0\Rightarrow y=0^2-1=-1$

در تمام زوج‌های مرتب فوق، وقتی x در ضابطهٔ گزینهٔ یک قرار داده شد، yها همان‌هایی بودند که در مجموعهٔ f بود. گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۱۶- با توجه به رابطهٔ بین x و $f(x)$ که به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ است، به کمک جدول داریم: $\begin{cases}x=0\\f(x)=2\end{cases}\Rightarrow 2=a(0)^2+b(0)+c\Rightarrow c=2$

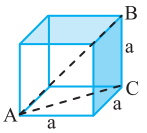
$\begin{cases}x=1\\f(x)=1\end{cases}\Rightarrow 1=a(1)^2+b(1)+2\Rightarrow a+b=-1$ $\quad(*)$ $\quad$ $\begin{cases}x=2\\f(x)=2\end{cases}\Rightarrow 2=a(2)^2+b(2)+2\Rightarrow 4a+2b=0$ $\quad(*)$

$\begin{cases}a+b=-1\\4a+2b=0\end{cases}\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین بالا را در ۲}}\begin{cases}2a+2b=-2\\4a+2b=0\end{cases}\xrightarrow[\text{از پایین کم می‌کنیم}]{\text{رابطه بالا را}}(4a+2b)-(2a+2b)=+2\Rightarrow 2a=+2\Rightarrow a=+1$

a را در * قرار می‌دهیم: $a+b=1\Rightarrow b=0\Rightarrow b=0$ (↓ +۱)

خواستهٔ سوال $a+b+c$ است بنابراین: $a+b+c=1+0+2=3$ گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۱۷- معکبی به طول ضلع a در نظر بگیرید. در این صورت $6\times a^2$: مساحت کل مکعب است (مکعب ۶ وجه (پهلو) به شکل مربع دارد). برای محاسبهٔ قطر هر وجه (قطر هر مربع) (AC) طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$AC^2=a^2+a^2\Rightarrow AC^2=2a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$$

پس $D'=a\sqrt{2}$: قطر هر وجه (قطر هر مربع) (AC) برای محاسبهٔ قطر مکعب (AB) طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^2=AC^2+CB^2\Rightarrow AB^2=(a\sqrt{2})^2+a^2=2a^2+a^2=3a^2\Rightarrow AB=a\sqrt{3}$$

پس $D=a\sqrt{3}$: قطر مکعب (AB). ابتدا ضلع مکعب را بر حسب مساحت جانبی به دست می‌آوریم:

$S=4a^2$: مساحت جانبی (همان مساحت دور شکل) $\quad$ $S=4a^2\Rightarrow a^2=\frac{S}{4}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{S}}{2}$: مساحت جانبی

مقدار به دست آمده را در رابطهٔ قطر جای‌گذاری می‌کنیم: $D=a\sqrt{3}\xrightarrow{a=\frac{\sqrt{S}}{2}}D=\frac{\sqrt{S}}{2}\times\sqrt{3}\Rightarrow D=\frac{\sqrt{3S}}{2}$ گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۱۸- شاید اولین کاری که کرده باشید این باشد که به دنبال عدد یک در xها گشتید تا متناظر آن را در yها پیدا کنید و جواب را به دست آورید. ولی متوجه شدید که عدد یک در xها وجود ندارد. پس ابتدا باید ضابطهٔ تابع را به دست آوریم. اما چگونه؟ باید ببینیم وقتی x مثلاً ۲ است بر چه اساسی y، ۳ است؟ هر جوابی که دادید باید ببینید آیا در مورد ستون سوم جدول نیز صدق می‌کند یا نه؟ اگر صدق کرد احتمالاً ضابطهٔ تابع را به دست آوردید. چرا احتمالاً؟ چون باید در سایر ستون‌ها نیز چک بکنید. (این سؤال، نیاز به ممارست در یافتن ضابطه‌ها دارد. پیشنهاد می‌کنیم که بیشتر تمرین کنید.) چون سرعت افزایش y زیاد است، احتمالاً توان ۲ داریم. اگر بگوییم «توان دوی هر عدد منهای خودش» غلط است، حال «توان دوی عدد منهای عدد قبلی» را امتحان می‌کنیم، به جواب رسیدیم.

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۳	۷	۱۳	۲۱	۳۱

$f(2)\xrightarrow{x^2-x}(2)^2-(2)=2\neq 3$

$f(2)\xrightarrow{x^2-(x-1)}(2)^2-(2-1)=4-1=-3$

ضابطهٔ تابع به صورت مقابل است. $f(1)=1^2-(1-1)\Rightarrow f(1)=1^2-1+1=1$

$f(x)=x^2-(x-1)\Rightarrow f(x)=x^2-x+1$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۱۹- یادآوری: می‌توانیم تابع را ماشینی در نظر بگیریم که در ازای هر ورودی یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنهٔ تابع داده می‌شوند و خروجی‌ها در برد تابع هستند. طبق تعریف تابع به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد. البته ممکن است چند ورودی مختلف، خروجی یکسان داشته باشند. اگر x عضوی از ورودی‌های تابع f و y خروجی این تابع به ازای x باشند، می‌نویسیم $y=f(x)$.

به عملیاتی که ماشین تابع روی ورودی انجام می‌دهد تا به خروجی تبدیل کند، «ضابطهٔ تابع» می‌گویند. $f(1)=5$ $\quad$ $f(x)=5f(x-1)$

حال در ضابطهٔ تابع به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$f(2)=5f(2-1)=5f(1)=5\times 5=5^2$

$f(3)=5f(2)=5\times 5^2=5^3$ $\quad$ $f(4)=5f(3)=5\times 5^3=5^4$ $\quad$ $f(5)=5f(4)=5\times 5^4=5^5$

$f(6)=5f(6)=5\times 5^5=5^6$ $\quad$ $f(7)=5f(6)=5^7$ $\quad$ $f(8)=5f(7)=5^8$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۲۰- چون رابطهٔ $f(x+y)=\frac{f(y)}{f(x)}$ به ازای هر x و y برقرار است، می‌توانیم y را برابر با هر عبارتی مثل x قرار دهیم. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x+y)=\frac{f(y)}{f(x)} \xrightarrow{y=x \text{ قرار می‌دهیم}} f(x+x)=\frac{f(x)}{f(x)}=1$$

حال به جای x عدد $\frac{1}{5}$ را قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow f(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})=\frac{f(\frac{1}{5})}{f(\frac{1}{5})} \Rightarrow f(\frac{2}{5})=1$$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۲۱-

$$f(3x-2)+3f(4)=4x-6$$

اگر بتوانیم x را طوری انتخاب کنیم که $3x-2$ برابر ۴ شود و بتوانیم $f(4)$ را پیدا کنیم یکی از مجهولات ضابطه پیدا می‌شود و سپس به سادگی می‌توانیم $f(3)$ را بیابیم.

$3x-2=4 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$ ✓

$$f(3x-2)+3f(4)=4x-6 \xrightarrow{x=2} f(4)+3f(4)=4\times 2-6 \Rightarrow 4f(4)=2 \to f(4)=\frac{1}{2}$$

بنابراین داریم:

$$f(3x-2)+3\times\frac{1}{2}=4x-6 \Rightarrow f(3x-2)=4x-6-\frac{3}{2} \Rightarrow f(3x-2)=4x-\frac{15}{2}$$

حال باید $f(3)$ را پیدا کنیم بنابراین:

$$3x-2=3 \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

$$f(3x-2)=4x-\frac{15}{2} \xrightarrow{x=\frac{5}{3}} f(3)=4\times\frac{5}{3}-\frac{15}{2}=\frac{20}{3}-\frac{15}{2} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} \frac{40-45}{6} \Rightarrow f(3)=-\frac{5}{6}$$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۲۲- در این تیپ از مسائل ما باید تشخیص دهیم ماشین تابع چه بر سر ورودی می‌آورد که به صورت خروجی در می‌آید، برای این‌کار فرض می‌کنیم: $x+2=\square$

ورودی $x+2$ → تابع → خروجی $\frac{2x-6}{x+4}$

حال سعی می‌کنیم $\frac{2x-6}{x+4}$ را به صورتی بنویسیم که در آن $\square$ ظاهر شود.

$$\frac{2x-6}{x+4}=\frac{2x+4-4-6}{x+2+2}=\frac{(2x+4)-10}{(x+2)+2}=\frac{2(x+2)-10}{(x+2)+2}=\frac{2\square-10}{\square+2}$$

بنابراین:

ورودی $\square$ → تابع → خروجی $\frac{2\square-10}{\square+2}$

حال اگر به جای $\square$، $2x$ قرار دهیم خواهیم داشت:

ورودی $2x$ → تابع → خروجی

$$f(2x)=\frac{2(2x)-10}{(2x)+2}=\frac{4x-10}{2x+2}=\frac{2(2x-5)}{2(x+1)}=\frac{2x-5}{x+1}$$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۲۳- سعی می‌کنیم خروجی تابع یعنی $9x^2+3$ را بر اساس ورودی تابع یعنی $3x-1$ بنویسیم.

سوال: $3x$ چه رابطه‌ای با $9x^2$ دارد؟ پاسخ: $(3x)^2=9x^2$. پس عبارت $3x-1$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(3x-1)^2=9x^2-6x+1$$

$$f(3x-1)=\underbrace{9x^2+3}_{\text{فرض سوال}}=9x^2\ \underbrace{-6x+6x}_{\text{اضافه و کم می‌کنیم}}\ \underbrace{+1+2}_{3}=\underbrace{9x^2-6x+1}_{(3x-1)^2}+6x+2=(3x-1)^2+6x+2$$

$$\Rightarrow f(3x-1)=(3x-1)^2+6x+2 \xrightarrow[\text{اضافه و کم می‌کنیم}]{+2-2} \Rightarrow f(3x-1)=(3x-1)^2+\underbrace{6x-2}_{2(3x-1)}+4$$

بنابراین اگر ورودی تابع $x-2$ باشد خواهیم داشت:

ورودی $3x-1$ → تابع → خروجی $(3x-1)^2+2(3x-1)+4$

ورودی $\square$ → تابع → خروجی $\square^2+2\square+4$

$$f(x-2)=(x-2)^2+2(x-2)+4=x^2-4x+4+2x-4+4=x^2-2x+4$$

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۴۲۴- باید خروجی را بر حسب ورودی پیدا کنیم.

اگر مقدار x را بر حسب ورودی تابع پیدا کنیم و مقدار به دست آمده را در خروجی تابع قرار دهیم مقدار خروجی تابع بر حسب ورودی به دست می‌آید.

در واقع می‌توان گفت اگر قرار دهیم: $\frac{x-3}{x+1}=A$ آنگاه مقدار x را بر حسب A به دست می‌آوریم:

ورودی $\frac{x-3}{x+1}$ → تابع → خروجی $3x+2$

$$\frac{x-3}{x+1}=\square \Rightarrow x-3=\square x+\square \Rightarrow$$

$$x-\square x=3+\square \Rightarrow x=\frac{3+\square}{1-\square}$$

$$\frac{x-3}{x+1}=A \Rightarrow \frac{x-3}{x+1}=\frac{A}{1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} x-3=xA+A$$

$$\Rightarrow x-xA=3+A \Rightarrow x(1-A)=3+A \Rightarrow x=\frac{3+A}{1-A}$$

حال این x که به دست آوردیم را در خروجی یعنی $3x+2$ قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow f(\underbrace{\frac{x-3}{x+1}}_{A})=3x+2 \Rightarrow f(A)=3(\underbrace{\frac{3+A}{1-A}}_{x})+2=\frac{9+3A}{1-A}+2=\frac{9+3A+2-2A}{1-A}=\frac{11+A}{1-A}$$

بنابراین داریم:

بنابراین اگر به جای $\square$، x را قرار دهیم خواهیم داشت: $f(x)=\frac{11+x}{1-x}$

$$\frac{11+\square}{1-\square}$$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۲۵- با توجه به اتحاد مکعب دوجمله‌ای داریم: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$(x+\frac{1}{x})^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3(x+\frac{1}{x}) \Rightarrow (x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3} \quad (1)$$

طبق صورت سوال داریم: $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}+2$. حال طبق رابطهٔ (۱) داریم: $f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})+2$

فرض می‌کنیم $x+\frac{1}{x}$ برابر است با $\square$.

$$f(\square)=\square^3-3\square+2$$

اگر $\square$ برابر $2x$ باشد خواهیم داشت: $f(2x)=(2x)^3-3(2x)+2=8x^3-6x+2$.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۲۶- مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتبِ تشکیل‌دهندهٔ تابع (ورودی‌ها) را دامنهٔ تابع و مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم این زوج‌های مرتب (خروجی‌ها) را برد تابع می‌نامند.

زمانی که ورودی‌های رابطه را در نمایش جدولی با دامنهٔ تابع یعنی $\{1,2,3,4\}$ مقایسه می‌کنیم، در می‌یابیم که a^2-6 برابر ۳ است بنابراین:

ورودی	۱	۲	a^2-6	۴	دامنه: $\{1,2,3,4\}$
خروجی	$2+b$	۶	۴	$a+2$	برد: $\{4,5,6,7\}$

$$a^2-6=3 \rightarrow a^2=9 \xrightarrow{\text{طبق فرض سوال } a>0} a=3$$

زمانی که خروجی‌های رابطه را در نمایش جدولی با برد قیاس می‌کنیم، در می‌یابیم که: برد تابع: $\{7,6,4,5\}$ ، خروجی‌ها: $\{2+b,6,4,5\}$

بنابراین:

$$2+b=7 \Rightarrow b=5$$

خواستهٔ سوال $a-b$ است: $a-b=3-5=-2$.

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۲۷- یک تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نباشند و اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند آن‌گاه مؤلفه‌های دوم آنها هم باید یکسان باشند.

$$\{(2,5),(m+2,n-1),(2,m^2-4),(5,6)\}$$

دو زوج مرتب $(2,5)$ و $(2,m^2-4)$ دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند. بنابراین باید مؤلفه‌های دوم آنها با هم برابر باشند:

$$m^2-4=5 \Rightarrow m^2=9 \xrightarrow{\text{طبق فرض سوال } m>0} m=3 \qquad \{(2,5),(5,n-1),(2,5),(5,6)\}$$

دو زوج مرتب $(5,n-1)$ و $(5,6)$ دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند. بنابراین برای تابع بودن مؤلفه‌های دوم آنها هم باید برابر باشند.

$$n-1=6 \Rightarrow n=7 \qquad \{(2,5),(5,6),(2,5),(5,6)\} \qquad \{(2,5),(5,6)\}$$

مؤلفه‌های تکراری را باید حذف کنیم سپس مجموع اعضای برد را حساب کنیم:

مجموع اعضای برد برابر است با $11=5+6$ (مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب مجموعهٔ برد را تشکیل می‌دهند).

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۴۲۸-

$$f=\{(2,m),(1,2m-1),(6,3+m)\}$$

$$2f(2)+f(1)-f(6)=5 \Rightarrow 2m+(2m-1)-(3+m)=5 \Rightarrow 3m-4=5 \Rightarrow 3m=9 \Rightarrow m=3 \qquad f=\{(2,3),(1,5),(6,6)\}$$

اعضای برد f برابر است با: $\{3,5,6\}$. حاصل‌ضرب اعضای برد برابر است با ۹۰.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۲۹-

$$\{-1,1,\frac{3}{2},4,6\} \xrightarrow{\text{ورودی (دامنه)}} \boxed{\frac{2}{3}x-1} \xrightarrow{\text{تابع}} \text{خروجی (برد)}$$

$$1 \rightarrow \frac{2}{3}(1)-1=\frac{2}{3}-1=\frac{2}{3}-\frac{3}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$-1 \rightarrow \frac{2}{3}(-1)-1=-\frac{2}{3}-1=-\frac{2}{3}-\frac{3}{3}=-\frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{2} \rightarrow \frac{2}{3}(\frac{3}{2})-1=1-1=0$$

$$4 \rightarrow \frac{2}{3}(4)-1=\frac{8}{3}-1=\frac{8}{3}-\frac{3}{3}=\frac{5}{3}$$

$$6 \rightarrow \frac{2}{3}(6)-1=\frac{12}{3}-1=4-1=3$$

$$\xrightarrow{\text{برد}} \{-\frac{5}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{5}{3},3\}$$

مجموع مقادیر موجود در مجموعهٔ برد: $(-\frac{5}{3})+(-\frac{1}{3})+0+\frac{5}{3}+3=\frac{-5-1+5+9}{3}=\frac{8}{3}$.

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۴۳۰- تصویر نمودار روی محور xها بیانگر «دامنه» و تصویر نمودار روی محور yها برابر «برد» است.

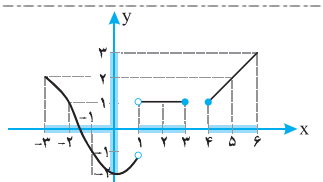
زمانی که نمودار را روی محور xها و yها تصویر می‌کنیم خواهیم داشت:

اعضای طبیعی دامنه: $\{2,3,4,5,6\}$

(عدد ۱ عضو دامنهٔ تابع نیست.)

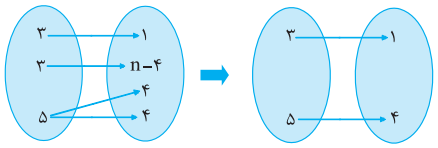
اعضای طبیعی برد: $\{1,2,3\}$

حاصل‌جمع اعضای طبیعی برد و دامنه برابر است با: $26=3+2+1+6+5+4+3+2$



گزینهٔ ۳ صحیح است.

۴۳۱- چون از عدد ۵ در نمودار پیکانی، دو پیکان خارج شده است، پس باید مقادیری که این پیکان‌ها به آنها وارد می‌شوند یکسان باشند تا نمودار رابطه، یک تابع باشد:



$m-2=4 \Rightarrow m=6$

چون از ۳ دو پیکان خارج شده بنابراین: $n-4=1 \Rightarrow n=5$

بنابراین اعضای تکراری را حذف می‌کنیم و داریم:

مجموع اعضای برد و دامنه برابر است با: $3+5+1+4=13$.

گزینهٔ ۳ صحیح است.

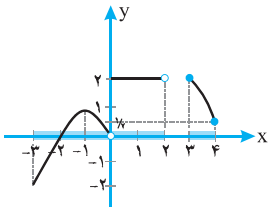
۴۳۲- $2(k\times 2+1)$: محیط شکل kاُم $\quad 2(3\times 2+1)$: محیط شکل ۳ $\quad 2(2\times 2+1)$: محیط شکل ۲ $\quad 2(2+1)$: محیط شکل ۱

بنابراین محیط شکل kاُم (خروجی تابع) برابر است با: $R=\{2(2k+1)\,|\,k\in N\}$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۳۳- دامنهٔ یک تابع (رابطه)، مجموعهٔ طول‌های نقاطی است که عضو تابع (رابطه) هستند.

دامنه از تصویر کردن نمودار تابع روی محور xها به دست می‌آید.



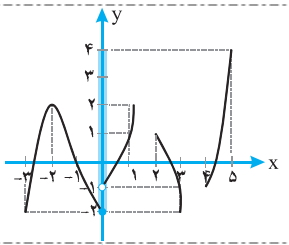
f دامنهٔ : $[-3,2) \cup [3,4]$ (اجتماع)

توجه کنید که عدد صفر عضو دامنه است زیرا نقطهٔ $(0,2)$ عضو تابع است.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۳۴- برد یک تابع (رابطه)، مجموعهٔ عرض‌های نقاطی است که عضو تابع (رابطه) هستند.

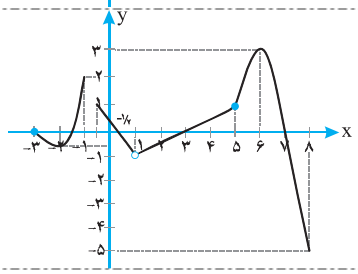
تصویر نمودار روی محور yها برابر (برد) است.



برد : $[-2,4]$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۳۵-



دامنه : $[-3,-1]\cup[-0/5\,,1)\cup(1,8]$

برد : $[-5,3]$

اشتراک اعداد صحیح دامنه و برد: $\{-3,-2,-1,0,2,3\}$

توجه کنید که عدد یک عضو دامنه نیست.

اشتراک دامنه و برد شامل ۶ عدد صحیح است.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۳۶- مخرج تابع $y=\dfrac{x^2}{x^2+9}$ نمی‌تواند برابر صفر شود زیرا عبارت x^2+9 به ازای هر x همواره از ۹ بیشتر است بنابراین نمی‌تواند برابر صفر باشد. پس دامنهٔ تابع مجموعهٔ R یعنی مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است.

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۴۳۷- مخرج تابع نمی‌تواند برابر صفر شود، پس اعدادی که مخرج کسر را صفر می‌کنند پیدا می‌کنیم.

$$(x-2)(x^3+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^3+8=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

پس دامنهٔ تابع برابر $R-\{2,-2\}$ است، بنابراین ۲ عضو از مجموعهٔ اعداد حقیقی را ندارد.

تذکر: برای تعیین دامنهٔ یک تابع، به هیچ وجه ضابطهٔ تابع را ساده نکنید.

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۳۸- برای تعیین دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم.

زمانی که فرجهٔ رادیکال ۲ باشد معمولاً یادداشت نمی‌شود. در رادیکال $\sqrt{1-9x^2}$ فرجه ۲ است، بنابراین: $1-9x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq \frac{1}{9} \Rightarrow -\frac{1}{3}\leq x\leq \frac{1}{3}$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۳۹- برای تعیین دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} 4-x^2\geq 0 \rightarrow x^2\leq 4 \rightarrow -2\leq x\leq 2 & (1) \\ x^3+27\geq 0 \rightarrow x^3\geq -27 \rightarrow x\geq -3 & (2) \end{cases}$$

باید اشتراک دو بازهٔ (۱) و (۲) را به عنوان دامنهٔ تابع معرفی کنیم زیرا x باید در هر دو عبارت بالا صدق کند. پس: دامنهٔ تابع $=[-2,2]$

توضیح بیشتر: برای این‌که بتوانیم در مسائل دشوارتر، بهتر و راحت‌تر اشتراک دامنه را پیدا کنیم باید بازه‌های مختلف را روی نمودار نشان دهیم.

همان‌طور که مشخص است اشتراک دو بازهٔ فوق برابر $[-2\,,2]$ است.

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۴۰- در تابع $y=\dfrac{x+3}{3x^2-2x+a}$ مخرج کسر نباید صفر باشد. از طرفی چون دامنهٔ تابع به صورت $R-\{b\}$ است. پس مخرج کسر دارای یک ریشه برابر b است.

مخرج کسر یک تابع درجه دوم است. برای آن‌که یک ریشه داشته باشد باید $\Delta=0$ باشد. پس دو شرط زیر در مورد مخرج تابع باید برقرار باشد.

$$f(x)=3x^2-2x+a \Rightarrow \begin{cases} f(b)=0 \Rightarrow 3b^2-2b+a=0 \\ \Delta=0 \Rightarrow 4-4\times3\times a=0 \Rightarrow 4=12a \Rightarrow a=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 3b^2-2b+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow b=\frac{2\pm\sqrt{4-4\times3\times\frac{1}{3}}}{6} \Rightarrow b=\frac{2\pm0}{6}=\frac{1}{3}$$

بنابراین حاصل $a+b$ برابر $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ است. گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۴۱- در تابع $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+mx-3n}$ نباید مخرج کسر صفر باشد. مخرج کسر یک عبارت درجه دوم است. چون دامنهٔ این تابع $R-\{3\}$ است، پس فقط عدد ۳ مخرج کسر را صفر می‌کند در نتیجه مخرج یک ریشه دارد. از طرفی می‌دانیم یک عبارت درجه دوم زمانی یک ریشه دارد که $\Delta=0$ باشد. پس دو شرط زیر در مورد مخرج برقرار است.

$$g(x)=x^2+mx-3x \Rightarrow \begin{cases} g(3)=0 \Rightarrow 9+3m-3n=0 \xrightarrow{\div3} 3+m-n=0 \\ \Delta=0 \Rightarrow \Delta=m^2-4(-3)n=0 \Rightarrow \Delta=m^2+12n=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+m-n=0 \rightarrow m+3=n \\ m^2+12n=0 \end{cases} \xrightarrow{n=m+3} m^2+12(m+3)=0 \rightarrow m^2+12m+36=0 \Rightarrow (m+6)^2=0 \Rightarrow m=-6$$

اگر $m=-6$ را در عبارت $n=m+3$ قرار دهیم خواهیم داشت $n=-3$.

خواستهٔ سوال $m+n$ است که برابر است با ۹-. گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۴۲- باید علامت عبارت $\frac{-2x+1}{x}$ را تعیین کنیم. پس ابتدا ریشهٔ عبارت را به دست می‌آوریم:

$$-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

حال علامت عبارت را قبل و بعد از ریشه‌های صورت و مخرج محاسبه می‌کنیم.

همان‌طور که در جدول روبه‌رو مشاهده می‌کنید عبارت $-2x+1$ بعد از $x=\frac{1}{2}$ منفی و قبل از آن مثبت است (کافی است یک عدد بزرگ‌تر و یک عدد کوچک‌تر از $\frac{1}{2}$ را امتحان کنید)؛ همچنین عبارت x بعد از صفر مثبت و قبل از آن منفی است و اما مهمّ برای ما عبارت $\frac{-2x+1}{x}$ است که باید حاصل تقسیم علامت $-2x+1$ و x را در بازه‌های مختلف به دست آوریم. همان طور که مشاهده می‌کنید «در بازهٔ قبل از صفر عبارت $-2x+1$ مثبت و x منفی است پس حاصل $\frac{-2x+1}{x}$ منفی است.»

x		0		$\frac{1}{2}$	
$-2x+1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-2x+1}{x}$	$-$	تعریف نشده	$+$	0	$-$

و به همین ترتیب «در بازهٔ صفر تا $\frac{1}{2}$ حاصل $\frac{-2x+1}{x}$ مثبت» و «از $\frac{1}{2}$ به بعد حاصل عبارت همان طور که در جدول مشاهده می‌کنید منفی است.»

بنابراین دامنهٔ $\sqrt{\frac{-2x+1}{x}}$، بازهٔ $[0,\frac{1}{2})$ است، توجه کنید در $x=0$ عبارت تعریف نشده است زیرا مخرج برابر صفر می‌شود. گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۴۳- باید دوباره تعیین علامت کنیم: توجه داشته باشید که مخرج کسر نمی‌تواند برابر صفر باشد.

$$2x-x^2>0 \Rightarrow x(2-x)>0$$

		0		2	
x	$-$	0	$+$	$+$	
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$x(2-x)$	$-$	تعریف نشده	$+$	تعریف نشده	$-$

بنابراین بازهٔ تعریف شده برای تابع $y=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$، بازهٔ $(0,2)$ است. گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴۴۴- **راه اول:** در این تیپ مسائل می‌توانیم از ایدهٔ طرفین وسطین استفاده کنیم و مقدار x را بر حسب y به دست آوریم.

$$y=\frac{x-2}{x+5} \xrightarrow{x\neq-5} xy+5y=x-2 \Rightarrow 5y+2=x-xy \Rightarrow 5y+2=x(1-y) \xrightarrow{\div1-y} \frac{5y+2}{1-y}=x$$

در عبارت بالا $y\neq1$ است زیرا مخرج نمی‌تواند صفر باشد. از طرفی x هم نباید برابر -5 باشد، بنابراین: چک می‌کنیم که آیا x می‌تواند برابر -5 باشد یا خیر؟

$$\frac{5y+2}{1-y}\neq-5 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} 5y+2\neq-5+5y \Rightarrow 7\neq0$$

به عبارت بدیهی رسیدیم بنابراین عبارت $\frac{5y+2}{1-y}$ هرگز برابر -5 نمی‌شود، بنابراین از مجموعهٔ برد تابع فقط باید عضو ۱ را حذف کنیم. برد $=R-\{1\}$

راه دوم: در حالت کلی برای تابع با ضابطهٔ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c\neq0$ و $ad-bc\neq0$) برد تابع برابر خواهد بود با: $R-\{\frac{a}{c}\}$

$$y=\frac{x-2}{x+5} \Rightarrow \text{بردتابع}=R-\{\tfrac{1}{1}\}=R-\{1\}$$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۴۵- دامنهٔ تابع برابر $[-4,2]$ است پس $-4<x\leq2$.

$$-4<x\leq2 \xrightarrow{\text{طرفین را در }\frac{5}{2}\text{ ضرب می‌کنیم}} -4\times\frac{5}{2}<\frac{5}{2}x\leq2\times\frac{5}{2} \rightarrow -10<\frac{5}{2}x\leq5 \rightarrow -10-3<\underbrace{\frac{5}{2}x-3}_{y}\leq5-3 \rightarrow -13<\frac{5}{2}x-3\leq2$$

بنابراین برد تابع $[-13,2)$ است. گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۴۶- توابع چند جمله‌ای که دامنهٔ آنها R است، برد آنها نیز مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است. (برد تابع، R است). گزینهٔ ۴ صحیح است.