درس ۱

شمـــارش

اصل جمع

- اگر عملی را بتوان به m طریق و عمل دیگری را بتوان به n طریق انجام داد، به شرطی که این دو عمل را نتوانیم با هم انجام دهیم، در این صورت عمل اول «یا» عمل دوم را می‌توان به $m+n$ طریق انجام داد.
- این اصل را می‌توان به بیش از دو عمل نیز تعمیم داد.

اصل ضرب

- برای پیدا کردن تعداد راه‌های ممکن در **یک تصمیم‌گیری چند مرحله‌ای** تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحلـه از تصـمیم‌گیـری در هـم ضرب می‌شوند.

با دو مثال زیر موضوع فوق برایتان جا می‌افتد.

مثال

امیرحسین دو شلوار به رنگ سرمه‌ای و سفید و سه بلوز به رنگ سبز، آبی و سفید دارد.

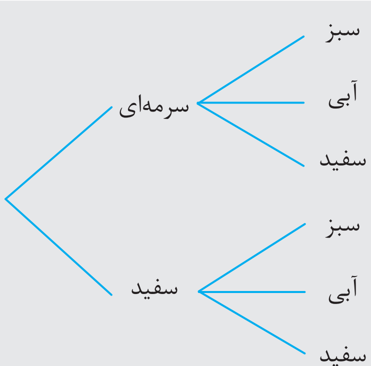
الف) نمودار درختی مربوط به حالت‌های مختلف پوشیدن شلوار و بلوز برای امیرحسین را رسم کنید.

ب) با اصل شمارش به همان جواب برسید.

پاسخ:

گام ۱) نمودار درختی

آخرین ستون به دست آمده را بشماریم، تعداد حالات به دست می‌آید: شش حالت!



گام ۲) اصل شمارش:

۳	۲
تعداد بلوز	تعداد شلوار

$\rightarrow ۲ \times ۳ = ۶$

جواب‌ها با هم برابر می‌باشد $\rightarrow ۲ \times ۳ = ۶$

مثال

با استفاده از اصل شمارش نشان دهید چند جفت از حروف الفبای فارسی می‌توانیم داشته باشیم؟

پاسخ:

گام ۱- می‌دانیم ۳۲ حرف وجود دارد.

گام ۲- جفت یعنی دو حرفی

۳۲	۳۲
حرف دوم	حرف اول

$\rightarrow ۳۲ \times ۳۲ = ۱۰۲۴$

یعنی ۱۰۲۴ جفت حرف می‌توان داشت.

فاکتوریل

برای نوشتن حاصل‌ضرب اعداد طبیعی متوالی، می‌توانیم از نماد فاکتوریل (!) استفاده کنیم.

فاکتوریل یک عدد برابر است با «**حاصل‌ضرب تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر و مساوی با آن عدد.**»

قاعدهٔ اصلی: $n! = n(n-1)(n-2)...$

مثال $5! = 5\times4\times3\times2\times1$

قواعد فرعی و بسیار پر کاربرد:

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)(n-3)... = \frac{n!}{n}$$

$$(n+1)! = (n+1)(n)(n-1)(n-2)... = (n+1)\times n!$$

قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$1! = 1$

$0! = 1$

مثال

تحقیق کنید $3!+3!=6!$ درست است یا نادرست.

پاسخ:

$3! = 3\times2\times1 = 6 \Rightarrow 3!+3! = 6+6 = 12$

$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

$3!+3! = 12 \neq 720 = 6!$

پس نادرست است.

مثال

حاصل عبارت $\frac{8!}{4!}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

$4! = 4\times3\times2\times1$

$$\frac{8!}{4!} = \frac{8\times7\times6\times5\times\overbrace{4\times3\times2\times1}^{4!}}{4\times3\times2\times1} = 8\times7\times6\times5 = 1680$$

انتخاب‌های مستقل و وابسته

انتخاب مستقل: در بعضی از آزمون‌ها (مانند درست - نادرست یا چهارگزینه‌ای) انتخاب پاسخ برای هر سؤال، مستقل از انتخاب‌های انجام شده برای سایر سؤال‌ها است. یعنی پاسخ به هر سوال، مستقل از سؤال قبلی می‌باشد که در این حالت انتخاب را مستقل می‌گوییم.

انتخاب وابسته: در بعضی از آزمون‌ها (آزمون‌های جورکردنی) انتخاب پاسخ برای هر سؤال، وابسته به انتخاب‌های انجام شده برای سایر سؤال‌ها (معمولاً سوال‌های قبل) است. یعنی هر پاسخی که انتخاب شد، دیگر نمی‌توان آن را انتخاب کرد. در این حالت معمولاً برای سؤال بعدی تعداد انتخاب‌ها یکی کمتر است که انتخاب را وابسته به سؤال قبلی می‌کند.

مثال

برای ۵ سؤال چهارگزینه‌ای چند پاسخ می‌توان در نظر گرفت؟

پاسخ:

گام ۱- جای هر سؤال را مشخص می‌کنیم:

□ □ □ □ □
(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

گام ۲- برای هر خانه حالت‌های مربوطه را می‌نویسیم و ضرب می‌کنیم و چون گفته است هر سؤال چهار گزینه دارد، پس هر کدام از مربع‌های فوق، می‌تواند یا گزینهٔ ۱ باشد، یا گزینهٔ ۲، یا گزینهٔ ۳ و یا گزینهٔ ۴. پس چهار حالت در هر کدام از مربع‌ها می‌تواند قرار بگیرید.

$4\times4\times4\times4\times4 = 4^5 = 1024$

یعنی ۱۰۲۴ حالت وجود خواهد داشت.

● راهنمای حل سؤال‌های اصل شمارش:

– قبل از هر چیز باید بدانیم چند شیء می‌خواهد انتخاب شود. آنگاه به تعداد آن چند شیء، مربع می‌کشیم.

– سپس تعداد اشیاء که مجموعهٔ اصلی ماست (یعنی n) را در مربع‌ها شروع به قرار دادن می‌کنیم.

– باید توجه کنیم که در صورت سؤال شروطی داده است یا خیر (مثلاً تکراری بودن یا نبودن، یک در میان بودن و یا ....) در آن صورت شرط را نیز رعایت می‌کنیم.

مثال کلمهٔ ۵ حرفی مرداب را در نظر بگیرید، و به دو سؤال زیر جواب دهید:

الف) چند کلمهٔ ۳ حرفی با حروف کلمهٔ مرداب می‌توانیم بسازیم که حروف تکراری نباشند؟

ب) چند کلمهٔ ۳ حرفی با حروف کلمهٔ مرداب می‌توانیم بسازیم؟ (تکرار مهم نیست.)

پاسخ: الف) گام ۱: وقتی می‌گوید تکراری نباشد یعنی هر خانه به خانهٔ قبلی بستگی دارد. نوع انتخاب، انتخاب وابسته است.

گام ۲: پس از مرحلهٔ دوم به بعد، در هر مرحله، یک انتخاب حذف می‌شود.

یعنی در خانهٔ اول هر ۵ حرف کلمهٔ مرداب می‌توانند قرار بگیرند. در خانهٔ دوم ۴ حرف می‌تواند برود (یک انتخاب کم می‌شود) یعنی مثلاً اگر «م» انتخاب شده است، دوباره نمی‌تواند انتخاب شود. در خانهٔ سوم ۳ حرف می‌تواند برود (باز به دلیل انتخاب‌های قبلی دو حرف حذف می‌شود.)

گام ۳:

$\square\ \square\ \square \rightarrow ۵\times۴\times۳=۶۰$

(۱) (۲) (۳)

ب) سه حرفی خواسته است، سه تا جا در نظر می‌گیریم. چون تکرار مهم نیست، پس در هر جا می‌توان، کل ۵ حرف را قرار داد:

$\square\ \square\ \square \rightarrow ۵\times۵\times۵=۱۲۵$

(۱) (۲) (۳)

جایگشت

هریک از راه‌های ممکن قرار گرفتن n شیء متمایز کنار یکدیگر، یک جایگشت n تایی از آن n شیء نامیده می‌شود.

نکته

بنا بر اصل ضرب تعداد کل جایگشت‌های n شیء متمایز برابر با $n!$ می‌شود.

مثال ۷ نفر به چند طریق می‌توانند صف ببندند؟

پاسخ: وقتی نفر اول ایستاد، برای ایستادن نفر دوم ۶ جا باقی می‌ماند. برای نفر سوم، ۵ جا، برای نفر چهارم، ۴ جا و الی آخر تا نفر هفتم. پس انتخاب‌ها وابسته به هم می‌باشند و جای هرکدام مشخص می‌باشد. چنین طرز قرار گرفتنی، جایگشت نامیده می‌شود.

$\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square \rightarrow ۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵۰۴۰$

(۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷)

ترتیب (تبدیل)

تعریف: وقتی می‌خواهیم از میان n شیء، r شیء را انتخاب کنیم و «ترتیب انتخاب» حالت جدید ایجاد می‌کند، این نوع انتخاب ترتیب نامیده می‌شود و برای محاسبهٔ آن از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}}$$

تذکر در واقع می‌توان گفت ترتیب r شیء از n شیء، همان جایگشت‌های r تایی از n شیء است.

نتیجه

می‌توان گفت یک جایگشت n تایی از n شیء، همان ترتیب n شیء از n شیء است.

$$p(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$$

مثال **از بین ۷ نفر به چند طریق می‌توان ۵ نفر را انتخاب کرد و در یک صف قرار داد؟**

پاسخ: برای درست کردن صف ۵ نفره، ۵ جا داریم. در این سوال برای جایگاه اول، ۷ انتخاب، برای جایگاه دوم، ۶ انتخاب و الی آخر تا جایگاه پنجم که ۳ انتخاب داریم. پس انتخاب‌ها وابسته به هم می‌باشند. پس خواهیم داشت:

$\boxed{\ }_{(۷)}\ \boxed{\ }_{(۶)}\ \boxed{\ }_{(۵)}\ \boxed{\ }_{(۴)}\ \boxed{\ }_{(۳)}$ $۷\times۶\times۵\times۴\times۳=۲۵۲۰$

راه حل دوم (با استفاده از ترتیب): می‌خواهیم از میان ۷ شیء، ۵ شیء را انتخاب کنیم و ترتیب انتخاب حالت جدید ایجاد می‌کند، پس خواهیم داشت:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\Rightarrow p(۷,۵)=\frac{۷!}{(۷-۵)!}=\frac{۷!}{۲!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۷\times۶\times۵\times۴\times۳=۲۵۲۰$$

روش پاسخ‌گویی به سؤال‌های مبحث جایگشت

- وقتی تعداد جایگاه‌ها با تعداد افراد یا اشیاء که می‌خواهند در آن جایگاه‌ها قرار بگیرند متفاوت باشد، «**ابتدا جایگاه‌ها را مشخص کرده**» و سپس تعداد افرادی که می‌توانند در آن جایگاهِ به خصوص قرار بگیرند را حساب کنید.
- اشتباه بیشتر دانش‌آموزان در این گونه سوالات این است که ابتدا افراد را یکی یکی انتخاب می‌کنند و سپس جایگاه‌هایی که هر یک از افراد می‌توانند در آن جای بگیرند را حساب می‌کنند؛ که با این راه به جواب غلط می‌رسند. مثلاً در مثال بالا می‌گویند، سوال گفته است که ۵ نفر را می‌خواهیم انتخاب کنیم، برای نفر اول ۵ جایگاه داریم، برای نفر دوم ۴ جایگاه و الی آخر که جواب در این حالت برابر $۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵$ می‌شود، که نادرست است.
- اما اگر تعداد جایگاه‌ها با تعداد افراد یا اشیاء که می‌خواهند در آن جایگاه‌ها قرار بگیرند برابر باشد، فرقی نمی‌کند که شما ابتدا جایگاه‌ها را مشخص کنید و سپس تعداد افراد یا اشیائی که می‌توانند در آن جایگاه‌ها قرار بگیرند را حساب بکنید و یا ابتدا افراد را مشخص کنید و سپس مشخص کنید که هر فرد انتخاب شده در چند جایگاه می‌تواند قرار بگیرد، علت این موضوع آن است که تعداد افراد با تعداد جایگاه‌ها برابر است.

مثال **به چند طریق می‌توان با حروف کلمهٔ flower کلمات سه حرفی ساخت؟ (تکرار جایز نیست.)**

پاسخ: راه اول: جابه‌جا شدن هر حرف فوق حالت جدیدی ایجاد می‌کند، پس ترتیب مهم است، پس با فرمول ترتیب حل می‌کنیم:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\Rightarrow p(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۶\times۵\times۴=۱۲۰$$

راه دوم: (استفاده از روش قبلی در جایگشت‌ها.) سه حرفی خواسته است، پس سه جا در نظر می‌گیریم. تکراری نباید باشد، پس اگر در جای اول هر ۶ حرف کلمهٔ انگلیسی فوق، قرار بگیرد، در جایگاه دومی ۵ تا و در سومین جا ۴ حرف می‌توانند قرار بگیرند:

$\boxed{\ }_{(۴)}\ \boxed{\ }_{(۵)}\ \boxed{\ }_{(۶)}$ $۶\times۵\times۴=۱۲۰$

جایگشت با تکرار

- در حالت کلی گاهی بعضی از حروف یا اعداد تکراری می‌باشند؛ در این صورت تعداد جایگشت‌های **n** شیء که در آن $a_۱$ شیء مثل هم و $a_۲$ شیء مثل هم باشند و به همین ترتیب a_n شیء مثل هم باشند، برابر است با:

$$p=\frac{n!}{a_۱!\,a_۲!\dots a_n!}$$

مثال **با حروف کلمهٔ «دندانه» چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ (از تمام ۶ حرف استفاده شود)**

پاسخ: اندیشهٔ کلیدی اول: حرف «د» دو بار تکرار شده است و حرف «ن» نیز دو بار.

اندیشهٔ کلیدی دوم: در فرمول جایگشت با تکرار جای‌گذاری می‌کنیم:

$$p=\frac{۶!}{۲!\times۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!\times۲!}=۱۸۰\ \text{حالت}$$

مثال

با حروف کلمهٔ: «دندانه» چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

پاسخ: اندیشهٔ کلیدی اول: حرف «د» دو بار تکرار شده است و حرف «ن» نیز دو بار.

اندیشهٔ کلیدی دوم: در فرمول جایگشت با تکرار جای‌گذاری می‌کنیم:

$$p=\frac{5!}{2!\times 2!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2!}{2!\times 2!}=30 \text{ حالت}$$

این پاسخ نادرست است: اول آنکه طبق آنچه در «روش پاسخگویی به سوال‌های جایگشت» گفته شد، در صورت کسر نباید !۵ باشد زیرا ۵ جایگاه داریم که در جایگاه اول هر ۶ حرف می‌توانند جای بگیرند و به همین ترتیب برای جایگاه‌های دوم ۵ حرف و الی آخر.

پس ظاهراً جواب برابر است با:
$$p=\frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2}{2!\times 2!}=\frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2}{2\times 2}=180 \text{ حالت}$$

که این استدلال برای جواب نیز نادرست است. چرا؟

علت نادرستی این استدلال آن است که آن حرفی که استفاده نمی‌شود در مخرج کسر تاثیرگذار است. مثلاً اگر از ۵ حرف انتخابی دو حرف «د»، حرف «ا»، حرف «ه» و فقط یک حرف «ن» انتخاب شوند، مخرج کسر برابر !۲ خواهد بود، ولی اگر دو حرف «د»، حرف «ا» و دو حرف «ن» انتخاب شوند، مخرج کسر برابر !۲×!۲ خواهد بود.

پس در سوالاتی که حروف تکراری داریم ولی از تمام حروف استفاده نمی‌شود، باید حالت‌های مختلف را در نظر گرفت و آنها را جداگانه حساب کرد و در نهایت جواب‌های به دست آمده را با یکدیگر جمع کرد.

حالت اول: حرف «د» فقط یک بار استفاده شود: (پس «ن» دو بار استفاده شده است.)

$$p=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2}{2}=60$$

حالت دوم: حرف «د» دو بار و حرف «ن» فقط یک بار استفاده شود:

$$p=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2}{2}=60$$

حالت سوم: حرف «د» دو بار و حرف «ن» نیز دو بار استفاده شود: (پس یکی از حروف «ا» یا «ه» استفاده نشده است.)

$$p=\frac{5!}{2!\times 2!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2}{4}=30 \quad \text{اگر حرف «ا» استفاده نشود:}$$

$$p=\frac{5!}{2!\times 2!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2}{4}=30 \quad \text{اگر حرف «ه» استفاده نشود:}$$

حالت دیگری نمی‌توان در نظر گرفت، پس کافی است این سه حالت را با هم جمع کنیم.

جواب سوال برابر خواهد بود با: $60+60+30+30=180$ (در این مثال اتفاقاً عدد به دست آمده با دو استدلال درست و نادرست تفاوت نداشت، اما اگر شما تعداد کلمات ۴ یا ۳ حرفی را به دست آورید تفاوت مقادیر را مشاهده می‌کنید.)

ترکیب

انتخاب **r** شیء از **n** شیء را که در آن ترتیب قرارگرفتن مهم نباشد، ترکیب می‌نامیم و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\boxed{C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}}$$

مثال

مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e\}$ را در نظر بگیرید.

الف) این مجموعه چند زیرمجموعهٔ دو عضوی دارد؟

ب) این مجموعه چند زیر مجموعهٔ سه عضوی دارد؟

ج) این مجموعه چند زیر مجموعهٔ سه عضوی شامل a دارد؟

پاسخ: الف) در یک مجموعه ترتیب اعضاء مهم نیست و جابه‌جایی آنها، مجموعهٔ جدیدی نمی‌سازد؛ پس تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی برابر ترکیب‌های ۲ تایی از ۵ عضو است.

ب) مشابه قسمت «الف» تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی برابر است با:
$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۳!۲!}$$

ج) چون زیر مجموعه‌های سه عضوی باید شامل a باشند، پس کافی است دو عضو دیگر آن را از بین ۴ عضو باقی مانده انتخاب کنیم.
$$\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!۲!}$$

مثال

مقدار n را طوری بیابید که رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$p(n,۲)+۴=C(۵,۴)$$

پاسخ:

$$\frac{n!}{(n-۲)!}+۴=\frac{۵!}{۴!(۵-۴)!}$$
$$\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}+۴=\frac{۵\times۴!}{۴!(۱)!}\Rightarrow n(n-۱)+۴=۵$$
$$\Rightarrow n^{۲}-n-۱=۰$$

حال معادلهٔ فوق را حل می‌کنیم.

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۱)^{۲}-۴(۱)(-۱)=۱-(-۴)=۵$$
$$n_{۱},n_{۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\Rightarrow n_{۱}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲},n_{۲}=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

چون هیچ یک از دو مقدار بالا عدد طبیعی نیست، پس رابطهٔ داده شده در صورت مثال برقرار نیست.

نکته

اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد آن‌گاه تعداد زیر مجموعه‌های آن برابر ۲^n است.

مثال

درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\dots+\binom{n}{n}=۲^{n}$$

پاسخ: اگر A یک مجموعهٔ دارای n عضو باشد.

تعداد زیر مجموعه‌های ۰ عضوی (مجموعهٔ تهی) مجموعهٔ A $=\binom{n}{۰}$

تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی مجموعهٔ A $=\binom{n}{۱}$

تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی مجموعهٔ A $=۱=\binom{n}{n}$

بنابراین طبق اصل جمع $۲^{n}=\binom{n}{n}+\dots+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۰}=$ تعداد زیرمجموعه‌های A

نکته

تعدادی از تساوی‌های مهم در ترکیبات عبارتند از:

$$۱)\ \binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$$

$$۲)\ \binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$۳)\ \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

$$۴)\ \binom{n+۱}{k+۱}=\binom{n}{k+۱}+\binom{n}{k}$$

$$۵)\ \binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\ldots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مثال

اگر $\binom{۱۰}{r}=\binom{۱۰}{۲r+۱}$ باشد مقدار r را بیابید.

پاسخ: برای برقرار بودن تساوی فوق دو حالت را می‌توان در نظر گرفت.

حالت اول: $r=۲r+۱\Rightarrow r=-۱$

چون n باید عددی طبیعی باشد این جواب غیرقابل قبول است.

حالت دوم می‌دانیم $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ بنابراین: $۲r+۱=۱۰-r\Rightarrow ۳r+۱=۱۰\Rightarrow r=۳$

چون r یک عدد طبیعی است بنابراین این جواب قابل قبول است.

مثال

یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی را در نظر بگیرید. این مجموعه چند زیرمجموعه دارای بیش از دو عضو دارد؟

پاسخ: باید تعداد زیرمجموعه‌های ۳ و ۴ و ... و ۱۰ عضوی را با هم جمع کنیم.

$$\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}+\ldots+\binom{۱۰}{۱۰}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۲}+\ldots+\binom{۱۰}{۱۰}=۲^{۱۰}$$

$$\Rightarrow \binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}+\ldots+\binom{۱۰}{۱۰}=۲^{۱۰}-\binom{۱۰}{۰}-\binom{۱۰}{۱}-\binom{۱۰}{۲}$$

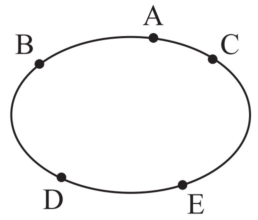
$$=۲^{۱۰}-۱-۱۰-\frac{۱۰\times۹}{۲}=۲^{۱۰}-۵۶$$

نکته

می‌دانیم اگر سه نقطه مانند A و B و C روی یک خط راست قرار نگیرند با اتصال آنها به وسیلهٔ پاره خط، یک مثلث به دست می‌آید.

مثال

پنج نقطهٔ A و B و C و D و E مطابق شکل روی محیط یک بیضی قرار دارند. چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن یکی از این پنج نقطه باشد؟



پاسخ: هر سه نقطه‌ای که انتخاب می‌کنیم روی یک خط راست قرار نمی‌گیرند، بنابراین تشکیل یک مثلث می‌دهند. پس کافی است تعداد ترکیب‌های ۳ شیء از ۵ شیء را حساب کنیم.

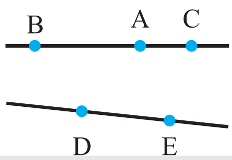
$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times۴}{۲!}=۱۰$$

توجه

اگر تعداد n نقطه روی محیط دایره‌ای قرار بگیرند نیز مشابه مثال قبل تعداد مثلث‌هایی که می‌توان توسط آن‌ها ساخت برابر $\binom{n}{۳}$ است.

مثال

پنج نقطهٔ A و B و C و D و E مطابق شکل طوری قرار دارند که نقاط A و B و C روی یک خط و نقاط D و E روی یک خط دیگر می‌باشند. چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن یکی از این پنج نقطه باشد؟



پاسخ: برای تشکیل مثلث نقاط نباید روی یک خط راست قرار بگیرند، بنابراین یا دو نقطه روی خط بالا و یک نقطه روی خط پایین باید انتخاب شود و **یا** یک نقطه روی خط بالا و دو نقطه روی خط پایین. (انتخاب ۲ از ۳ و انتخاب ۱ از ۲، **یا** انتخاب ۱ از ۳ و انتخاب ۲ از ۲)

$$\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۱}+\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۲}=\frac{۳!}{۱!۲!}\times\frac{۲!}{۱!۱!}+\frac{۳!}{۱!۲!}\times\frac{۲!}{۲!۰!}=۳\times۲+۳\times۱=۹$$

مثال

انجمن دبستانی از ۶ نفر عضو زن و مرد می‌خواهد ۳ نفر را انتخاب کند. به چند طریق این انتخاب امکان‌پذیر است؟

پاسخ: این که اول کدام یک و بعداً کدام یک انتخاب شوند مهم نیست، پس ترتیب مهم نیست:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}\overset{n=۶,r=۳}{=\!=\!=}\frac{۶!}{(۶-۳)!۳!}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۳\times۲}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲}=۵\times۴=۲۰$$

توجه

برای پیدا کردن تعداد ترکیب‌های ممکن، می‌توانید اول از اصل شمارش یا ترتیب شروع کنید و سپس بر تعداد راه‌هایی که در آن شیء‌ها می‌توانند مرتب شوند تقسیم کنید.

مثال

انجمن دبستانی از ۶ نفر عضو زن و مرد می‌خواهد ۳ نفر را انتخاب کند. به چند طریق این انتخاب امکان‌پذیر است به شرط آنکه یک نفر خاص حتماً انتخاب شود؟

پاسخ: این که اول کدام یک و بعداً کدام یک انتخاب شوند مهم نیست، پس ترتیب مهم نیست، اما چون یک نفر انتخاب شده است پس باید دو نفر دیگر از میان ۵ نفر باقیمانده انتخاب شوند:

$$C(۵,۲)=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!۲!}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

مثال

انجمن دبستانی از ۶ نفر عضو زن و مرد (۳ زن و ۳ مرد) می‌خواهد ۳ نفر را انتخاب کند. به چند طریق این انتخاب امکان‌پذیر است به شرط آنکه حداقل یک زن انتخاب شود؟

پاسخ: روش اول: حداقل یک زن انتخاب شود به این معنی است که یا یک زن و دو مرد انتخاب شوند، یا دو زن و یک مرد انتخاب شوند و یا هر سه نفر انتخاب شده زن باشند. پس سه حالت را باید جداگانه حساب کنیم و با هم جمع کنیم.

حالت اول: یک زن و دو مرد انتخاب شوند. چون ترتیب انتخاب مهم نیست پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. انتخاب یک زن از میان سه زن و انتخاب دو مرد از میان سه مرد:

$$C(3,1)\times C(3,2)=\binom{3}{1}\times\binom{3}{2}=\frac{3!}{1!2!}\times\frac{3!}{2!1!}=3\times3=9$$

حالت دوم: دو زن و یک مرد انتخاب شوند. چون ترتیب انتخاب مهم نیست پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. انتخاب دو زن از میان سه زن و انتخاب یک مرد از میان سه مرد:

$$C(3,2)\times C(3,1)=\binom{3}{2}\times\binom{3}{1}=\frac{3!}{1!2!}\times\frac{3!}{2!1!}=3\times3=9$$

حالت سوم: سه زن انتخاب شوند. چون ترتیب انتخاب مهم نیست پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. انتخاب سه زن از میان سه زن:

$$C(3,3)=\binom{3}{3}=\frac{3!}{3!0!}\times\frac{3!}{3!\times1}=1$$

پس جواب برابر است با حاصل جمع این سه عدد: $9+9+1=19$

روش دوم (پیشامد مکمل): روش دیگری نیز برای حل این سوال وجود دارد. وقتی می‌خواهیم حداقل یک نفر از افراد انتخاب شده زن باشد همانند آن است که «**از کل تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب سه نفر (بدون هیچ محدودیتی) حالت‌هایی که هر سه نفر انتخاب شده مرد باشند را کم کنیم**» تا حالتی که حداقل یک زن عضو سه نفر انتخاب شده باشد به دست بیاید. (پیشامد مکمل)

انتخاب ۳ نفر از میان ۶ نفر بدون هیچ محدودیتی:

$$C(6,3)=\binom{6}{3}=\frac{6!}{(6-3)!3!}=\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!\times3\times2}=\frac{6\times5\times4}{3\times2}=5\times4=20$$

حالت‌هایی که هر سه نفر انتخاب شده مرد باشند (انتخاب ۳ نفر از میان ۳ مرد):

$$C(3,3)=\binom{3}{3}=\frac{3!}{3!0!}\times\frac{3!}{3!\times1}=1$$

پس جواب مطلوب برابر است با: $20-1=19$

پرسش‌های درس اول از فصل اول

فاکتوریل

۱. مقدار عبارت $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ کدام است؟ .... سراسری – ۷۲

۱) $n(n+1)$ ۲) $n(n-1)$ ۳) $\frac{(n+1)}{(n-1)}$ ۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

۲. عبارت $(7-5)\times(7^3-5^3)\cdot 90$ برابر فاکتوریل «چه عددی» است؟ .... تألیفی

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۳. اگر $n!=120\times 42$، آنگاه n کدام است؟ .... سراسری – ۶۳

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۴. اگر $\frac{1}{6}=\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ باشد، n چقدر است؟ .... آزاد – ۸۰

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

انتخاب r عدد از n عدد با تکرار ارقام

۵. با ارقام ۳,۲,۱,۰ چند عدد سه رقمی با تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ .... سراسری – ۶۵

۱) ۹ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۶. مجموعهٔ اعداد چهار رقمی که با ارقام «۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵» با تکرار ارقام می‌توان نوشت چند عضو دارد؟ .... آزاد – ۷۸

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۰۰ ۳) 6^4 ۴) 5×6^3

۷. چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیر صفر است؟ .... سراسری – ۸۸

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۶۲۵ ۴) ۱۰۲۴

۸. می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آنها یکی از حروف (ا،ب،ج،د) و در سمت چپ آنها عدد دو رقمی بدون صفر نوشته شود، چندکارت می‌توان ساخت؟ .... سراسری – ۷۷

۱) ۳۲۴ ۲) ۳۶۰ ۳) ۲۴۳ ۴) ۱۸۰

۹. پلاک اتومبیل سواری «ب» در تهران به صورت $\frac{\text{تهران}}{\text{** ب ***}}$ است که هر ستاره نمایش یک رقم غیر صفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟ .... سراسری – ۸۲

۱) ۱۱۶۶۴ ۲) ۱۴۵۸۰ ۳) ۱۵۴۸۰ ۴) ۱۸۲۲۵

۱۰. چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ و متشکل از رقم‌های فرد وجود دارند؟ .... سراسری خارج از کشور – ۹۱

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

انتخاب r عدد از n عدد بدون تکرار ارقام

۱۱. با ارقام ۳,۲,۱,۰ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ .... سراسری – ۶۳

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۶۴

۱۲. با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۵، چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ .... آزاد – ۷۶

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۱۳. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵، چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ .... سراسری – ۷۰

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۱۴. چند عدد سه رقمی، با ارقام متمایز وجود دارد؟ .... سراسری خارج از کشور – ۸۸

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۰۴ ۳) ۶۴۸ ۴) ۷۲۰

۱۵. با ارقام ۵ و ۴ و ۰ و ۱ چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ .... سراسری – ۶۹

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۱۶. با ارقام «۰ و ۲ و ۴ و ۷ و ۹» چند عدد سه رقمی کوچک‌تر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ آزاد - ۷۸

۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

جایگشت r شیء بدون تکرار

۱۷. سه نوع کتاب علمی و چهار نوع کتاب ادبی را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که کتاب‌ها یک در میان قرار گیرد؟ سراسری - ۷۸

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۶ ۴) ۷۲

۱۸. سه کتاب ریاضی و دو کتاب اقتصاد که با هم متفاوت‌اند را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتاب‌های هم موضوع همواره کنار هم باشند؟ سراسری - ۷۲

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰

۱۹. با جایگشت ارقام ۶، ۵، ۵، ۲، ۱ چند عدد پنج رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان ساخت؟ سراسری - ۸۳

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۲۰. تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ DAMDARAN به شرط آن‌که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟ سراسری - ۸۴

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

جایگشت r شیء با تکرار

۲۱. تعداد راه‌های مختلف مرتب کردن حرف‌های واژهٔ «مسلمانان» برابر است با : آزاد - ۸۴

۱) !۹ ۲) !۸ ۳) !۷ ۴) !۶

۲۲. حروف واژهٔ «نازنین» با حروف کدام کلمه دارای تعداد ترتیب‌های مساوی است؟ آزاد - ۸۶

۱) پابرجا ۲) مولودی ۳) سامانه ۴) شیرینی

۲۳. تعداد ترتیب‌های مختلف حروف کدام‌یک از واژه‌ها، متفاوت با واژه‌های دیگر است؟ آزاد - ۸۸

۱) فرامرز ۲) کیخسرو ۳) شهریار ۴) مازیار

۲۴. تعداد اعداد هفت رقمی متشکل از جایگشت ارقام عدد ۲۳۲۵۶۵۵ کدام است؟ سراسری - ۸۵

۱) ۲۱۰ ۲) ۴۲۰ ۳) ۵۶۰ ۴) ۸۴۰

۲۵. حروف کلمهٔ EARNEST را به چند طریق می‌توان در کنار هم قرار داد به طوری که حرف N همواره در وسط قرار گیرد؟ (بدون توجه به مفهوم) سراسری - ۹۱

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۲۶. تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ DADRASS که در آن حرف R همواره در وسط قرار گیرد؟ سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱) ۴۵ ۲) ۷۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۵

۲۷. حروف کلمهٔ ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که Sها یک در میان باشند؟ سراسری-۷۹

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

جایگشت‌های r شیء از n شیء

۲۸. حاصل عبارت $\frac{p(n,r)}{p(n+1,r+1)}$ کدام است؟ سراسری - ۷۰

۱) $\frac{1}{n+1}$ ۲) $\frac{r}{n}$ ۳) $\frac{1}{(n+1)!}$ ۴) $\frac{r+1}{n+1}$

۲۹. راه‌های مختلفی که می‌توان رئیس، معاون و دفتردار یک مؤسسهٔ آموزشی را از بین ۶ نفر کارمند انتخاب نمود، برابر فاکتوریل «چه عددی» است؟ آزاد - ۸۲

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

۳۰. از ۱۲ نفر دانش‌آموز نمونه، با چند راه می‌توان سه نفر را جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه، انتخاب کرد؟ سراسری خارج از کشور - ۹۱

۱) ۱۳۲۰ ۲) ۶۶۰ ۳) ۳۳۰ ۴) ۲۲۰

۳۱. تعداد جایگشت‌های سه حرفی، از حروف کلمهٔ SERESHT کدام است؟ .... سراسری – ۸۷

(۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴) ۹۶

۳۲. تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی از حروف کلمهٔ SALAMAT که دو حرف آن A باشد، کدام است؟ .... سراسری – ۸۹

(۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۵۶ (۴) ۷۲

۳۳. پنج حرف از ۸ حرف کلمه BUSINESS را با جایگشت‌های متمایز در کنار هم قرار می‌دهیم. تعداد گروه‌هایی که هر سه S در آنها موجود باشد، کدام است؟ .... سراسری – ۹۲

(۱) ۱۵۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۴۰

۳۴. تعداد جایگشت‌های سه حرفی انتخاب شده از حروف کلمهٔ DELAVAR کدام است؟ .... سراسری – ۹۰

(۱) ۱۱۵ (۲) ۱۲۵ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۳۵

۳۵. تعداد جایگشت‌های سه حرفی، از حروف کلمهٔ MARDSALAR کدام است؟ .... سراسری خارج از کشور – ۸۷

(۱) ۱۴۵ (۲) ۱۴۸ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۵۱

۳۶. با حروف کلمه RANGIN ، چند کلمهٔ رمز ۳ حرفی می‌توان ساخت؟ .... سراسری – ۹۴

(۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴) ۱۲۰

۳۷. با حروف کلمه KAMYAB، چند رمز عبور ۴ حرفی می‌توان ساخت؟ .... خارج – ۹۴

(۱) ۱۴۲ (۲) ۱۵۶ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۲

۳۸. شش رقم ۵، ۵، ۵، ۳، ۳، ۱، را از مقوا بریده در کنار یکدیگر جابه‌جا می‌کنیم. تعداد اعداد شش رقمی متمایز، کدام است؟ .... خارج – ۹۵

(۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۸۰ (۴) ۱۲۰

۳۹. شش رقم ۸، ۴، ۸، ۷، ۳ و ۲، را از مقوا بریده و هر سه رقم انتخابی از آنها را در کنار هم جابه‌جا می‌کنیم. چند عدد سه رقمی متمایز حاصل می شود؟ .... سراسری – ۹۵

(۱) ۶۰ (۲) ۶۳ (۳) ۷۲ (۴) ۷۵

۴۰. از یک قطعه مقوا، ارقام ۵ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ بریده شده است. با جایگشت هر سه رقم دلخواه از آنان چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟ .... سراسری خارجی از کشور – ۹۰

(۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۴

ترکیب r شیء از n شیء

۴۱. جواب معادلهٔ $C(x,۲) = ۲x$ کدام است؟ .... سراسری – ۶۲

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۲. اگر ترکیب $C(a+b,a)=m$ باشد، آنگاه مقدار ترکیب $C(a+b,b)$ کدام است؟ .... سراسری – ۷۱

(۱) m (۲) bm (۳) am (۴) $(a+b)m$

۴۳. اگر $C(n,۴) = p(n-۱, ۳)$ ، عدد n کدام است؟ .... سراسری – ۸۴

(۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۳۴ (۴) ۴۳

۴۴. تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز نسبت به ترکیب‌های ۳ از ۸ شیء مختلف، برابر فاکتوریل چه عددی است؟ .... آزاد – ۸۷

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۵. یک مجموعهٔ ۸ عضوی، چند زیر مجموعهٔ ۴ عضوی دارد؟ .... سراسری – ۷۶

(۱) ۸۴ (۲) ۷۰ (۳) ۵۶ (۴) ۴۲

۴۶. یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی چند زیر مجموعهٔ ۲ عضوی دارد؟ .... آزاد – ۷۵

(۱) ۶۰ (۲) ۳۰ (۳) ۵۰ (۴) ۴۵

۴۷. یک مجموعهٔ n عضوی ۶ زیر مجموعهٔ دو عضوی دارد، n کدام است؟ .... آزاد – ۷۶

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۵

۴۸. اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی با تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر باشد، حاصل ترکیب $\binom{n}{۳}$ کدام است؟ .... آزاد – ۷۷

(۱) ۳۶ (۲) ۲۰ (۳) ۷۲ (۴) ۴۸

۴۹. یک مجموعهٔ n عضوی، ۵۵ زیر مجموعهٔ $n-2$ عضوی دارد، n کدام است؟ .... سراسری – ۸۲

۱) ۸　۲) ۹　۳) ۱۰　۴) ۱۱

۵۰. هر یک از حروف کلمهٔ DELAVARAN بر روی ۹ گوی نوشته شده است، به چند طریق می‌توان ۳ گوی از این ۹ گوی انتخاب کرد؟ .... سراسری – ۸۶

۱) ۳۵　۲) ۴۲　۳) ۵۶　۴) ۸۴

۵۱. به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟ .... سراسری – ۹۳

۱) ۵۴　۲) ۶۰　۳) ۷۲　۴) ۹۰

۵۲. از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دستهٔ ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می‌توان انتخاب کرد؟ .... سراسری – ۸۱

۱) ۲۴۱۰　۲) ۲۴۲۰　۳) ۲۵۲۰　۴) ۲۵۴۰

۵۳. در یک پرواز داخلی ۴ جای خالی در هواپیما است و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند، به چند طریق می‌توان از بین آنان ۴ نفر را سوار کرد؟ .... سراسری – ۸۳

۱) ۵۶　۲) ۶۳　۳) ۱۱۲　۴) ۱۲۶

۵۴. از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان سه نفر طوری انتخاب کرد، که همواره یک فرد مورد نظر، بین آن سه نفر باشد؟ .... سراسری – ۸۰

۱) ۴۵　۲) ۵۵　۳) ۶۶　۴) ۷۲

۵۵. دانش‌آموزی باید به ۱۸ سؤال از ۲۰ سؤال امتحان به دلخواه پاسخ بدهد. به چند طریق می‌تواند این ۱۸ سؤال را انتخاب کند؟ .... سراسری – ۶۸

۱) ۱۸　۲) ۲۰　۳) ۱۹۰　۴) ۳۸۰

۵۶. از بین ۶ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم می‌خواهیم انجمنی را با ۴ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۲ دانش‌آموز کلاس سوم تشکیل دهیم. این عمل، به چند طریق ممکن است؟ .... سراسری – ۶۷

۱) ۲۵　۲) ۱۵۰　۳) ۳۳۰　۴) ۴۲۰

۵۷. با حروف کلمهٔ FARHAD ، چند رمز عبور ۶ حرفی می‌توان ساخت، به طوری که دو حرف A در کنار هم نباشند؟ .... سراسری – ۹۶

۱) ۱۲۰　۲) ۱۸۰　۳) ۲۴۰　۴) ۳۰۰

۵۸. با حروف کلمهٔ DAMDARAN ، چند رمز عبور ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری که با D شروع و به D ختم شوند؟ .... خارج – ۹۶

۱) ۱۲۰　۲) ۱۶۰　۳) ۱۸۰　۴) ۲۴۰